ZEITSCHRIFT

FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Ueber die Wärme der Gase, von M. L. Frankenheim, Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

Die Lehre von der Wärme ist, wie die meisten Zweige der Physik, erst in diesem Jahrhunderte zu einiger Vollkommenheit gediehen. In England, ausser den Arbeiten von Rumford und Leslie, die mit dem Inhalte der folgenden Untersuchung weniger zusammenhängen, durch Dalton. Er suchte durch seine theoretischen und practischen Arbeiten fast den ganzen Kreis der Wärme-Erscheinungen zu umfassen, die aber zu diesem grossen Zwecke nicht zahlreich und genau genug waren. Ure's spätere Versuche über die Elasticität und Wärme der Dämpfe sind vielleicht zuverlässiger, allein die Folgerungen, die er aus ihnen zieht, nicht von innerer Unrichtigkeit frei, die theils schon öffentlich gerügt sind, theils nicht. In Frankreich ragen die Versuche von Dulong und Petit durch ihre Genauigkeit und Anzahl vor allen andern hervor; ihre empirischen Formeln möchten aber hie

und da einige Modificationen erleiden müssen. Clément und Désormes, Delaroche und Bérard haben einige wichtige Puncte bestätigt, ihre eigenen Versuche über die Capacität der Gase sind jedoch durch Haycraft's weit übertroffen. Von den neuesten Arbeiten von Gay-Lussac und Despretz sind uns bloss einige Notizen bekannt, die aber mehr hoffen lassen als gewähren.

Wie andere physikalische Erscheinungen, sind auch die der Wärme von Laplace mathematisch behandelt. Er stützt sich dabei auf die Molecularität des Wärmestoffs und den gleichmässigen Gang des Luftthermometers mit den Incrementen der Wärme. So auch Poisson. Ueber die Richtigkeit der mathematischen Entwickelung kann bei solchen Männern kein Zweifel obwalten, wohl aber über ihre Hypothesen und ich bitte, dass man den folgenden Versuch, den Cyclus der Wärmeerscheinungen der Körper — so lange sie Gase sind — zu bestimmen, nicht desshalb ohne weitere Prüfung verwerfen möge, weil die Resultate oft nicht mit denen jener Männer übereinstimmen. Die Bestätigung derselben durch die Erfahrung, die sich grösstentheils auf eine Kritik der Versuche über die Verdampfung stützt, müssen wir desswegen auf eine andere Gelegenheit verschieben.

1.

Eine der wichtigsten Entdeckungen der neueren Physik ist, dass sich alle Gase durch Temperaturveränderungen gleichförmig ausdehnen; d. h. wenn die Elasticität eines Gases bei der Temperatur $z^{o} = a$ ist, und bei der Temperatur y^{o} ohne Veränderung im spe-

cifischen Gewichte $= b$, so ist $a : b$ für alle Gase dieselbe Grösse, unabhängig von ihrer chemischen Beschaffenheit, ihrem specifischen Gewichte, für einfache sowohl als gemischte Gase — z. B. der atmosphärischen Luft — und nur von den Temperaturen y und z abhängig.

Es war natürlich, auf diese Gleichförmigkeit eine Thermometerscale zu gründen, und in der That, sobald man sie erkannt hatte, wurden alle früheren Massstäbe, so weit es möglich war, darauf bezogen.

2.

Man kann dabei von zwei Gesichtspuncten ausgehen. Man bestimmt die Grade entweder so, dass wenn bei x° die Elasticität $= a$ ist, sie bei $x^\circ + 1^\circ = a + n$, bei $x + 2^\circ = a + 2n$, und allgemein bei $x + y = a + yn$ ist; oder man dehnt jene Gleichförmigkeit auch auf die Temperatur aus, so dass in jedem Theile der Scale eine gewisse Anzahl Grade stets derselben Veränderung in der Elasticität entsprechen. Wenn daher bei irgend einem Gase, bei der Temperatur x° die Elasticität $= a$ ist, so ist sie bei $x + 1^\circ = an$, bei $x + 2^\circ = an^2$ und allgemein bei $x + y = an^y$.

Wir wollen die erste Eintheilungsart die arithmetische, die zweite die geometrische nennen. Beide besitzen alle Eigenschaften, die man von einer thermometrischen Scale verlangen kann; jene aber den Vorzug, dass man sie ohne weitere Berechnung fast unmittelbar auf die Instrumente tragen kann; diese, dass dieselbe Anzahl Grade unter allen Umständen bei gleich bleibendem specifischen Gewichte, auf dasselbe Verhältniss in der Elasticität deuten.

3.

Die Natur der Gase bietet uns keine Merkmale dar, woran wir die festen Puncte, die für jede Scale nothwendig sind, erkennen könnten; man musste daher zu andern Körpern seine Zuflucht nehmen und fand in dem Gefrier- und Siedpuncte der Flüssigkeit, auch in manchen chemischen Erscheinungen, Temperaturen, die mit einigen Correctionen angewandt, als fest angesehen werden konnten. Die Zwischenräume wurden in 12, 80, 96, 100, 180, 212, 1000 u. a. Grade getheilt, und bald von dem wärmern nach dem kältern Puncte, bald umgekehrt gezählt. Wir werden im Folgenden nur nach der 100theiligen Scale rechnen.

4.

Die Elasticität der Gase nimmt von dem 0ten bis zum 100ten Grade derselben von a auf a.1,3750 zu, wobei nur die vierte Decimalstelle ungewiss ist. Für jeden Grad, also um 1,00375. Daher ist die Elasticität bei der Temperatur ξ^0

$$a(1 + 0{,}00375\xi) = a(1 + h\xi),$$

wenn man h statt 0,00375 setzt.

Bei der Temperatur $-\xi^0$ ist sie

$$a(1 - h\xi),$$

eine Grösse, die, wenn $\xi = \frac{1}{h} = 266\frac{2}{3}$ ist, gleich null wird. Bei $-266\frac{2}{3}$ C. ist also die Elasticität a l l e r Gase = 0; in Beziehung auf sie kann daher der absolute Nullpunct nie t i e f e r stehen. Es ist bekannt, dass alle bisherigen Speculationen über diesen Gegenstand auf falschen Voraussetzungen beruhen.

Die Elasticitäten zweier nur durch ihre Temperaturen ξ und v unterschiedener Gase verhalten sich wie

$$1 + h\xi : 1 + hv.$$

5.

Der geometrischen Scalen sind eben so viele möglich als der arithmetischen; wir werden stets einer 100theiligen folgen. Man möchte die Berechnung der letztern für unnöthig halten, da es gleichgiltig ist, welches Masses man sich bedient, wenn es nur an Genauigkeit keinem andern nachsteht; bei weiterer Prüfung der Wärmeerscheinungen werden wir jedoch viele Beispiele finden, wo die geometrische Scale eine weit leichtere Uebersicht gewährt, als die arithmetische und wollen ihr daher einige Aufmerksamkeit widmen.

Wenn die Elasticität bei 0° = a ist, so ist sie bei

$$100° = a.1,3750$$
$$200° = a.(1,3750)^2$$
$$x° = a.(1,3750)^{\frac{x}{100}} = El.x.$$

eine Abkürzung, deren wir uns in der Folge häufig bedienen werden.

$$\log El.x = \log.a + x\frac{\log.1,375}{100} = \log.a + 0,001383.x$$

$$x = \frac{\log El.x - \log.a}{0,001383} = 723.06(\log El.x - \log.a)$$

und um die Gleichung von a unabhängig zu machen

$$x - y = 723,06(\log El.x - \log El.y).$$

Die Differenzen der Logarithmen der Elasticitäten sind proportional den Differenzen der geometrischen Grade.

6.

Auf die arithmetische Scale bezogen, ist

$$x - y = 723,06\log\frac{1 + h\xi}{1 + hv} = \varkappa\log\frac{1 + h\xi}{1 + hv},$$

wenn $\alpha = \frac{100}{\log(1+100h)}$, in unserem Falle = 723,06 ist, wodurch eine Scale aus der andern berechnet werden kann. Dieses ist im Folgenden mit einer unserem Zwecke angemessenen Genauigkeit für eine grössere Reihe von Temperaturen geschehen. Die erste Scale enthält die gewöhnlichen 100theiligen Grade, die zweite die entsprechende Elasticität, wenn die bei $0^\circ = 1$ gesetzt wird, oder $1 + h\xi$, die im Folgenden häufig benützt werden wird; die dritte endlich die geometrischen Grade. Beide Scalen werden wir stets durch ξ°, v° oder ξ° C. (Celsius) und x°, y° oder z° G (geometrisch) unterscheiden.

Tabelle der Elasticität der Gase und der geometrischen Scale für alle Grade Celsius von — 40 bis + 200 und für die niedrigern und höhern Temperaturen mit grössern Zwischenräumen.

Negative Grade.

Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)
— 1	0,99625	— 1,180	11	0,95875	13,229
2	0,99250	2,364	12	0,95500	14,459
3	0,98875	3,553	13	0,95125	15,694
4	0,98500	4,746	14	0.94750	16,934
5	0,98125	5,943	15	0,94375	18,180
6	0,97750	7,145	16	0,94000	19,431
7	0,97375	8,352	17	0,93625	20,686
8	0,97000	9,565	18	0,93250	21,946
9	0,96625	10,782	19	0,92875	23,211
10	0,96250	12,003	20	0,92500	24,482

Grade C. (ξ)	Elasticität $(1 + h\xi)$	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität $(1 + h\xi)$	Grade G. (x)
—21	0,92125	—25,758	—70	0,73750	— 95,59
22	0,91750	27,039	75	0,71875	103,65
23	0,91375	28,325	80	0,70000	112,00
24	0,91000	29,015	85	0,68125	120,31
25	0,90625	30,911	90	0,66250	128,96
26	0,90250	32,213	95	0,64375	137,93
27	0,89875	33,521	100	0,62500	147,59
28	0,89500	34,835			
29	0,89125	36,154	110	0,5875	167,0
30	0,88750	37,478	120	0,5500	187,7
31	0,88375	38,807	130	0,5125	209,9
32	0,88000	40,142	140	0,4750	233,8
33	0,87625	41,483	160	0,4000	287,7
34	0,87250	42,830	180	0,3250	352,9
35	0,86875	44,183	200	0,2500	435,3
36	0,86500	45,541	220	0,1750	547,3
37	0,86125	46,905	240	0,1000	723,1
38	0,85750	48,275	250	0,0625	870,7
39	0,85375	49,651	260	0,0250	1108,4
40	0,85000	51,034	$266\frac{2}{3}$	0,0000	— ∞
—45	0,83125	58,04			
50	0,81250	65,21			
55	0,79375	72,55			
60	0,77500	80,04			
65	0,75625	87,72			

1 — 100 Grade.

Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)
+ 1	1,00375	+ 1,175	+ 31	1,11625	+ 34,535
2	1,00750	2,346	32	1,12000	35,588
3	1,01125	3,513	33	1,12375	36,638
4	1,01500	4,675	34	1,12750	37,684
5	1,01875	5,833	35	1,13125	38,726
6	1,02250	6,987	36	1,13500	39,765
7	1,02625	8,137	37	1,13875	40,801
8	1,03000	9,282	38	1,14250	41,833
9	1,03375	10,423	39	1,14625	42,862
10	1,03750	11,560	40	1,15000	43,888
11	1,04125	12,693	41	1,15375	44,911
12	1,04500	13,822	42	1,15750	45,930
13	1,04875	14,947	43	1,16125	46,946
14	1,05250	16,068	44	1,16500	47,958
15	1,05625	17,185	45	1,16875	48,967
16	1,06000	18,298	46	1,17250	49,973
17	1,06375	19,407	47	1,17625	50,976
18	1,06750	20,512	48	1,18000	51,975
19	1,07125	21,613	49	1,18375	52,971
20	1,07500	22,710	50	1,18750	53,965
21	1,07875	23,803	51	1,19125	54,955
22	1,08250	24,893	52	1,19500	55,942
23	1,08625	25,979	53	1,19875	56,926
24	1,09000	27,062	54	1,20250	57,906
25	1,09375	28,143	55	1,20625	58,833
26	1,09750	29,217	56	1,21000	59,859
27	1,10125	30,287	57	1,21375	60,831
28	1,10500	31,354	58	1,21750	61,800
29	1,10875	32,418	59	1,22125	62,765
30	1,11250	33,478	60	1,22500	63,728

Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)
+ 61	1,22875	+ 64,687	+81	1,30375	+83,292
62	1,23250	65,644	82	1,30750	84,198
63	1,23625	66,598	83	1,31025	85,095
64	1,24000	67,549	84	1,31500	85,990
65	1,24375	68,497	85	1,31875	86,883
66	1,24750	69,443	86	1,32250	87,775
67	1,25125	70,386	87	1,32625	88,665
68	1,25500	71,325	88	1,33000	89,552
69	1,25875	72,212	89	1,33375	90,437
70	1,26250	73,196	90	1,33750	91,318
71	1,26625	74,177	91	1,34125	92,296
72	1,27000	75,056	92	1,34500	93,073
73	1,27375	75,982	93	1,34875	93,949
74	1,27750	76,905	94	1,35250	94,821
75	1,28125	77,825	95	1,35625	95,690
76	1,28500	78,743	96	1,36000	96,557
77	1,28875	79,658	97	1,36375	67,425
78	1,29250	80,571	98	1,36750	98,284
79	1,29625	81,480	99	1,37125	99,144
80	1,30000	82,388	100	1,37500	100,000
		100 — 200 Grad.			
+101	1,37875	+100,855	+111	1,41625	109,285
102	1,38250	101,709	112	1,42000	110,113
103	1,38625	102,560	113	1,42375	110,941
104	1,39000	103,408	114	1,42750	111,767
105	1,39375	104,254	115	1,43125	112,591
106	1,39750	105,098	116	1,43500	113,413
107	1,40125	105,940	117	1,43875	114,233
108	1,40500	106,779	118	1,44250	115,050
109	1,40875	107,616	119	1,44625	115,865
110	1,41205	108,451	120	1,45000	116,678

Grade C. (ξ)	Elasticität ($1 + h\xi$)	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität ($1 + h\xi$)	Grade G. (x)
+121	1,45375	+117,489	+156	1,58500	144,633
122	1,45750	118,298	157	1,58875	145,376
123	1,46125	119,105	158	1,59250	146,117
124	1,46500	119,910	159	1,59625	146,855
125	1,46875	120,713	160	1,60000	147,591
126	1,47250	121,514	161	1,60375	148,326
127	1,47625	122,313	162	1,60750	149,059
128	1,48000	123,109	163	1,61125	149,791
129	1,48375	123,904	164	1,61500	150,521
130	1,48750	124,697	165	1,61875	151,240
131	1,49125	125,488	166	1,62250	152,975
132	1,49500	126,276	167	1,62625	152,700
133	1,49875	127,063	168	1,63000	153,424
134	1,50250	127,848	169	1,63375	154,146
135	1,50625	128,631	170	1,63750	154,866
136	1,51000	129,411	171	1,64125	155,584
137	1,51375	130,190	172	1,64500	156,301
138	1,51750	130,967	173	1,64875	157,016
139	1,52125	131,742	174	1,65250	157,729
140	1,52500	132,515	175	1,65625	158,441
141	1,52875	133,286	176	1,66000	159,151
142	1,53250	134,055	177	1,66375	159,860
143	1,53625	134,823	178	1,66750	160,567
144	1,54000	135,589	179	1,67125	161,272
145	1,54375	136,352	180	1,67500	161,976
146	1,54750	137,114	181	1,67875	162,679
147	1,55125	137,874	182	1,68250	163,383
148	1,55500	138,632	183	1,68625	164,079
149	1,55875	139,388	184	1,69000	164,776
150	1,56250	140,143	185	1,69375	165,472
151	1,56625	140,896	186	1,69750	166,166
152	1,57000	141,647	187	1,76125	166,859
153	1,57375	142,395	188	1,70500	167,550
154	1,57750	143,142	189	1,70875	168,240
155	1,58125	143,888	190	1,71250	168,929

Grade C. (ξ)	Elasticität ($1 + h\xi$)	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität ($1 + h\xi$)	Grade G. (x)
+191	1,71625	+169,616	+196	1,73500	+173,028
192	1,72000	170,301	197	1,73875	173,706
193	1,72375	170,985	198	1,74250	174,382
194	1,72750	171,668	199	1,74625	175,057
195	1,73 25	172,349	200	1,75000	175,731
		Grade über 200.			
+205	1,76875	+179,08	+310	2,1625	+242,19
210	1,78750	182,39	320	2,2000	247,59
215	1,80625	185,66	330	2,2375	252,90
220	1,82500	188,90	340	2,2750	258,12
225	1,84375	192,11	350	2,3125	263,25
230	1,86250	195,30	360	2,3500	268,30
235	1,88125	198,45	370	2,3875	273,25
240	1,90000	201,55	380	2,4250	278,16
245	1,91875	204,63	390	2,4625	282,98
250	1,93750	207,69	400	2,5000	287,73
255	1,95625	210,72	420	2,5750	297,01
260	1,97500	213,71	440	2,6500	306,03
265	1,99375	216,68	460	2,7250	314,80
270	2,01250	219,62	480	2,8000	323,32
275	2,03125	222,53	500	2,8750	331,62
280	2,05000	225,42	520	2,9500	339,71
285	2,06875	228,28	540	3,0250	347,59
290	2,08750	231,11	560	3,1000	355,28
295	2,10625	233,92	580	3,1750	362,79
300	2,12500	236,70	600	3,2500	370,12
650	3,4375	387,69	1600	7,000	611,2
700	3,6250	404,41	1800	7,750	643,0
750	3,8125	420,20	2000	8,500	672,0
800	4,0000	435,33	2500	10,375	734,6
850	4,1875	449,67	3000	12,250	786,8
900	4,3750	463,47	3500	14,125	799,0
950	4,5625	476,62	4000	16,000	870,7
1000	4,7500	489,29	6000	23,500	931,4

Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)	Grade C. (ξ)	Elasticität (1 + hξ)	Grade G. (x)
+1100	5,125	+513,2	+8000	31,000	+1078,3
1200	5,500	535,3	10000	38,500	1146,0
1300	5,875	556,0	15000	57,250	1271,0
1400	6,250	574,9	20000	76,000	1359,9

7.

Beide Scalen stimmen nur bei 0° und 100° mit einander überein, und ihre Differenz wird um so grösser, je weiter sie sich von jenen beiden festen Puncten entfernen. Zwischen 0 und 100° weicht 48° C am meisten ab, da es 51°, 975 G. entspricht. Ueber 100° bleibt die geometrische Scale hinter der arithmetischen zurück, sie beträgt bei 200° nur 175°,7 und bei 1000° noch nicht 500°; dagegen ist sie unter 0° grösser und schreitet vorzüglich in der Nähe von — 26° C sehr rasch fort. Bei — 266° $\frac{2}{3}$ C. ist sie. — ∞. Hier fehlt also der absolute Nullpunct der arithmetischen Scale, welches auch ihrem Principe nach nothwendig ist.

8.

Man sieht aus der Tabelle, dass 1° der geometrischen Scale in verschiedenen Theilen derselben einer sehr verschiedenen Anzahl arithmetischer Grade entspricht. Bei — 260° C. z. B. sind 5° C. = 437° G., und bei + 200° sind 5°, 2 = 3° G. Es ist oft nothwendig dieses Verhältniss zu kennen. Dieses geschieht durch folgende sehr einfache Rechnung:

$$x = a \log(1 + h\xi)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\alpha h}{1 + h\xi}, \quad \frac{dx}{d\xi} : \frac{dy}{dv} = \frac{1}{1 + h\xi} : \frac{1}{1 + hv}$$

$$= \frac{1}{El.x} : \frac{1}{El.y}$$

Nun ist aber dieses Differentialverhältniss eben die gesuchte Grösse, daher sind in zwei Theilen derselben Scale die verhältnissmässigen Grössen der arithmetischen und geometrischen Grade verkehrt proportional der Elasticität der Gase.

Um 0° z. B. ist 1° C. = 1°, 18 G., also bei 100° ist 1° C. $= \frac{1°,18}{1,375} =$ 0°86 G.

9.

Ein Körper, der durch irgend eine Ursache, etwa durch Ausdehnung eines Theiles in einen grösseren Raum, sich von 1° C. auf 0° C. abkühlt, kühlt sich nach der arithmetischen Scale eben so sehr ab, als wenn er von 101° C. auf 100° sinkt. Werden dieselben absoluten Abkühlungen aber auf die geometrische Scale bezogen, so würde sie im ersten Falle 1,375 mal so gross seyn, als im letzten. So lange wir also noch nicht wissen, welche von beiden Scalen, oder ob eine von beiden der absoluten Wärmemenge proportional ist, fehlt uns ein Mass für die Schnelligkeit der Abkühlung bei verschiedenen Temperaturen. Dieses vorzüglich in Beziehung auf die Dulong'schen Versuche.

10.

Je grösser der Werth von h ist, desto rascher entfernen sich beide Scalen von einander. Betrüge z. B. die Ausdehnung zwischen den festen Puncten der Scale 0,5, so entspräche 250° C. nur 200° G.; bei uns ist diese Grösse 208° G.

11.

Statt hunderttheilig hätten wir die geometrische Scale auch nach irgend einer andern Eintheilung berechnen können; dieses wird durch eine leichte Reduktion bewirkt, indem nur der Werth von α eine Veränderung erleidet.

$$x - y = \alpha' \log. \frac{1 + h\xi}{1 + hv}$$

$$\alpha' = \frac{x - y}{\log. \frac{1 + h\xi}{1 + hv}}$$

Bei **Réaumur** ist, wenn $\xi = 80$, $y = 0$,

$$\frac{1 + h\xi}{1 + hv} = 1,375$$

$$\alpha' = \frac{80}{\log 1,375} = \frac{4}{5}\alpha.$$

Wenn die geometrischen Grade der Tabelle mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt werden, so erlangt man die 80 theilige geometrische Scale. Z. B. 40° R = 43,172 R. G.

Weniger einfach gestaltet sich die Anwendung der **Fahrenheit'schen** Scale, wenn 0° und 212° übereinstimmen sollen. Dann ist

$$\frac{1 + h\xi}{1 + hv} = \frac{11 : 8}{14 : 15} = \frac{165}{112}$$

$$\alpha' = \frac{212}{\log 165 - \log 112} = 1260$$

wobei aber schon der Gefrierpunct des Wassers in beiden abweicht. Sollen 32° und 212° übereinstimmen, so ist $\alpha' = \frac{9}{5} \alpha$.

12.

Die gleichförmige Ausdehnung aller gasförmigen Körper wird auch durch die Erfahrung bestätigt, dass sich die Mischungsgewichte der Gase wie ihre specifischen Gewichte bei gleichen Temperaturen und Elasticitäten verhalten. Da jene Grössen von den zufälligen Temperaturen und Elasticitäten, worin wir gewöhnlich operiren, nicht abhängig seyn können, so müssen, wenn das specifische Gewicht unverändert bleibt, bei gleichen Temperaturveränderungen auch die Elasticitäten gleichmässig variiren.

13.

Wenn man das Volumen eines Gases oder Dampfes, dessen Temperatur mit den umgebenden Körpern im Gleichgewichte ist, vermehrt, so entsteht Kälte, d. h. die benachbarten Körper treten Wärme an dasselbe ab; bei einer Verminderung des Volumens dagegen empfangen diese Wärme. Sehen wir aber von dem Einflusse der fremden Körper, und überhaupt von der Wärme ab, so lässt sich das Phänomen folgendermassen darstellen:

Wenn das Volumen eines Gases vermindert wird, so steigt die Elasticität höher, als es bloss durch die Vermehrung des specifischen Gewichtes der Fall seyn würde, und sinkt bei der Vermehrung des Volumens tiefer.

Die Temperatur des Gases sei ξ, das specifische Gewicht werde durch Sp.x bezeichnet, also die Elasticität durch

$$El.x = Sp.x\ (1 + h\xi)$$

Durch die Raumveränderung werde die Temperatur = v, das specifische Gewicht = Sp.y und die Elasticität = El.y, so ist

$$El.y = Sp.y\ (1 + hv)$$

Je grösser die Raumveränderung ist, oder jemehr Sp.x von Sp.y abweicht, desto mehr sind auch $1 + h\xi$ und $1 + hv$ von einander verschieden, und eines ist eine Function des andern.

14.

Ueber die Natur derselben können mir noch nicht mit Gewissheit entscheiden; allein so wie die Ausdehnung von der Dichtigkeit und chemischen Beschaffenheit unabhängig war, so ist es auch, wenn man von dem Einflusse der umgebenden Körper absieht, höchst wahrscheinlich dass:

Die Elasticität durch gleiche Raumveränderungen stets auf gleiche Weise verändert werde, und die Function $\frac{El.y}{El.x} = F\left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right)$ von der Beschaffenheit des Gases unabhängig sei. Mir hätten nun noch die Gestalt dieser Function zu bestimmen.

15.

Die Elasticität und das specifische Gewicht eines Gases El.x und Sp.x durch blosse Raumverände-

rung zu El.y und Sp.y geworden, werden nun von Neuem so verändert, dass sie El.x und Sp.x werden, so ist:

$$\frac{El.y}{El.x} \cdot \frac{El.z}{El.y} = F\left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right) \cdot F\left(\frac{Sp.z}{Sp.y}\right).$$

Diese Grössen sind aber auch

$$= \frac{El.z}{El.x} \cdot F\left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right), \text{ also}$$

$$F\left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right) \cdot F\left(\frac{Sp.z}{Sp.y}\right) = F\left(\frac{Sp.z}{Sp.x}\right),$$

welches, nach bekannten Methoden berechnet, auf eine Gleichung der Form

$\frac{El.y}{El.x} = \left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right)^{\beta}$ führt. β kann jede rationale und irrationale Grösse seyn, und muss durch Versuche bestimmt werden.

$$\frac{El.y}{El.x} = \frac{1 + hv}{1 + h\xi} \cdot \frac{Sp.y}{Sp.x} = \left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right)^{\beta}; \text{ daher}$$

$$\frac{Sp.y}{Sp.x} = \left(\frac{1 + hv}{1 + h\xi}\right)^{\frac{1}{\beta - 1}}; \quad \frac{El.y}{El.x} = \left(\frac{1 + hv}{1 + h\xi}\right)^{\frac{\beta}{\beta - 1}};$$

oder wenn man der Kürze wegen $\frac{\beta}{\beta - 1} = \varepsilon$ setzt

$$\log\frac{Sp.y}{Sp.x} = (\varepsilon - 1)\log\frac{1 + hv}{1 + h\xi} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\log\frac{El.y}{El.x} \text{ und}$$

$$\log\frac{El.y}{El.x} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\log\frac{Sp.y}{Sp.x} = \log\frac{1 + hv}{1 + h\xi},$$

wodurch die durch Raumveränderung hervorgebrachten Wirkungen auf die mathematische Scale bezogen werden. Daraus folgt für die geometrische

$$y - x = \frac{\alpha}{\varepsilon - 1}\log.\frac{Sp.y}{Sp.x} = \frac{\alpha}{\varepsilon}\log\frac{El.y}{El.x}.$$

Sobald β bekannt ist, kann die Anzahl der geometrischen Grade berechnet werden, um welche die

Temperatur des Gases durch die Zusammendrückung oder Ansdehnung verändert wird. Sie ist proportional dem Logarithmus der specifischen Gewichte und Elasticitäten: Gleich starke Raumveränderungen bringen unter allen Umständen eine gleich starke Abkühlung oder Erwärmung in geometrischen Graden hervor. Wenn irgend ein Gas durch die Verdopplung des specifischen Gewichts von 0° auf 20° G steigt, so wird ein Gas, das auf 100° stand, auf 120° G erhoben. Ein Gesetz, das für die arithmetische Scale keine Anwendung findet.

16.

Ob die Wärme materiell ist, oder nicht, ist uns hier gleichgültig; wir können aber in allem, was die Mittheilung derselben an andere Körper betrifft, uns dieses Bildes bedienen, und annehmen, dass die Menge der in einem Gase enthaltenen Wärme durch die blosse Raumänderung nicht verändert wird, dass also in gleichen Massen desselben Gases, immer gleich grosse Mengen Wärme sind, wenn das specifische Gewicht, die Temperatur und die Elasticität sich so verhalten, dass

$$\log\frac{El.y}{El.x} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\log\frac{Sp.y}{Sp.x} = \varepsilon\log\frac{1 + hv}{1 + h\varepsilon}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha}(y - x) \text{ oder } \frac{Sp.x}{(1 + h\varepsilon)^{\varepsilon - 1}} = \frac{Spy}{(1 + hv)^{\varepsilon - 1}} \text{ ist.}$$

17.

Wenn man ein Gas von Sp.x und der Temperatur x° G. um y° G. erwärmt, so ist eine gewisse Quantität Wärme nöthig, die in dem Gase bleibt, wenn man es

etwa in n Räume ausdehnt, so dass die Temperatur wieder auf x° G. herabsinkt. Dehnt man dagegen das Gas von Sp.x und Temperatur x° G. erst in n Räume aus, so wird das specifische Gewicht $= \frac{Sp.x}{n}$, und die Temperatur um y° sinken. Erwärmet man dieses Gas nun so, dass es wieder auf x° G steigt, so wird man durch beide Operationen ein völlig gleiches Gas erhalten; denn in beiden ist das specifische Gewicht $= \frac{Sp.x}{n}$, und die Temperatur x°, also auch die Elasticität gleich. Aber bei der ersten ist zu der ursprünglichen Wärme des Gases diejenige hinzugetreten, welche nöthig war, das Gas von x° auf $x + y°$ zu heben; bei dieser, um es von $x - y°$ auf x° zu heben; beide Mengen Wärme sind also einander gleich, d. h.

Gleiche Massen desselben Gases, deren Temperaturen, specifische Gewichte und Elasticitäten verschieden sind, aber ein solches Verhältniss zu einander haben, dass die Menge Wärme in beiden gleich ist, bedürfen immer gleiche Quantitäten Wärme, wenn die Temperatur um eine gleiche Anzahl geometrischer Grade erhoben werden soll.

18.

Wenn aber $\frac{Sp.x}{(1+h\xi)^{e-1}}$ nicht, wie wir bisher angenommen haben, constant ist, so findet das obige Gesetz vielleicht seine Anwendung nicht, und die Menge Wärme, welche nöthig ist, eine Masse Gas bei unverändertem specifischen Gewichte auf einen gewissen Grad

zu erheben, ist wahrscheinlich eine Function davon, zugleich aber auch von $\frac{1+h\xi}{1+hv}$, wenn das Gas von ξ^o auf v^o C. erwärmt werden soll. Setzen wir nun die Menge der nöthigen Wärme $= P$, so ist

$$P = F. \left(\frac{Sp.x}{(1+\xi h)^{\varepsilon-1}}, \frac{1+h\xi}{1+hv}\right),$$ eine Function, die wir aufzusuchen haben.

Q sei die Wärme, wodurch das schon auf v^o erhobene Gas, auch auf ζ^o erhoben wird, so ist

$$Q = F \left(\frac{Sp.y}{(1+hv)^{\varepsilon-1}}, \frac{1+hv}{1+h\xi}\right)$$

$$P + Q = F \left(\frac{Sp.x}{(1+h\xi)^{\varepsilon-1}}, \frac{1+h\xi}{1+hv}\right)$$

$$+ F \left(\frac{Sp.y}{(1+hv)^{\varepsilon-1}}, \frac{1+hv}{1+h\zeta}\right)$$

aber auch $= F\left(\frac{Sp.x}{(1+h\xi)^{\varepsilon-1}}, \frac{1+h\xi}{1+h\zeta}\right)$

wodurch man Gleichungen erlangt, die von den Werthen von ξ, v und ζ unabhängig sind. Gehörig entwickelt, findet man

$P = A \log. \frac{1+hv}{1+h\xi}$, wobei A eine von der Beschaffenheit des Gases, der einmal angenommenen Einheit der Wärme — etwa geschmolzenes Eis — und dem angewendeten logarithmischen Systeme abhängt.

19.

Die Wärme, wodurch ein Gas bei unverändertem specifischen Gewichte von x^o auf y^o erhoben wird,

ist also von dem specifischen Gewichte und der Menge der im Gase enthaltenen Wärme völlig unabhängig, sondern nur $\log \frac{1+hv}{1+hg}$ proportional. Aber

$$A \log \frac{1+hv}{1+hg} = A \frac{y-z}{a}.$$

Wir erlangen daher als das Resultat unserer bisherigen Untersuchung folgendes wichtige Gesetz:

Die Menge Wärme, welche nöthig ist, um eine Masse Gas, bei unverändertem specifischen Gewichte, um eine gewisse Anzahl geometrischer Grade zu erheben, ist direct bloss dieser Anzahl proportional.

Wenn 1 Pf. Gas z. B., das in einem gegebenen Raume eingeschlossen ist, mit so viel Wärme, wodurch 1 Pf. Eis geschmolzen werden könnte, etwa um 20° G. erwärmt wird; so wird es durch zwei oder dreimal so viel Wärme um 40° oder 60° G. erwärmt werden. Es ist hierbei völlig gleichgültig, ob das specifische Gewicht des Gases = a oder = 1000 a ist, oder die Temperatur von 0° auf 20° oder von 1000° auf 1020° G. erhoben werden soll; obgleich in dem letzten Falle sich ungleich mehr Wärme in den Gasen befindet. Nur darf während der Erwärmung das Volumen das Gas nicht verändert werden.

Dieses so paradoxe Gesetz, das mich selbst in hohem Grade überrascht hat, ist eine nothwendige Folge der beiden Annahmen §. §. 1. u. 14. Die erste ist eine der unzweifelhaftesten Gegenstände der Naturlehre, die zweite zwar nicht unmittelbar erwiesen, allein in ungleich höherem Grade wahrscheinlich, als eini-

ge Hypothesen von Laplace und Poisson in ihren Arbeiten über die Wärme.

Die folgenden Sätze sind bloss Corollare von diesem.

20.

Die Differenz der Wärme gleicher Massen eines Gases von verschiedenen Elasticitäten Temperaturen und specifischen Gewichten ist proportional den Unterschieden der Temperaturen in geometrischen Graden, wenn beide Gase auf gleiche specifische Gewichte gebracht sind.

Die Beschaffenheit der Gase sei

Sp.x El.x und x° G

Sp.y El.y und y° G;

durch blosse Raumänderung auf gleiche specifische Gewichte gebracht, werden obige Grössen

$$\text{Sp.z, El.x} \left(\frac{\text{Sp.z}}{\text{Sp.x}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} \text{ und } x + \frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{\text{Sp.z}}{\text{Sp.x}}$$

$$\text{Sp.z, El.y} \left(\frac{\text{Sp.z}}{\text{Sp.x}}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}} \text{ und } y + \frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{\text{Sp.z}}{\text{Sp.y}}$$

Die Differenz der Wärme also proportional

$$\frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{\text{Sp.y}}{\text{Sp.x}} + x - y$$

eine wie natürlich von z unabhängige Grösse, woraus man unmittelbar die Differenzen der Wärme finden kann, wenn α und ε bekannt sind.

21.

Wo alles ausser Masse und chemische Bildung verschieden ist, ist die Wärmedifferenz

$$= A\left(x - y + \frac{\alpha}{\varepsilon - 1}\log\frac{Sp.y}{Sp.x}\right)$$

$$= A\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(x - y) + \frac{\alpha}{\varepsilon - 1}\log\frac{El.y}{El.x}\right)$$

Wo die specischen Gewichte gleich, aber die Temperaturen verschieden sind:

$$= A\,(x - y)$$

Wo die Elasticitäten gleich, aber die Temperaturen verschieden sind

$$= A\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}(x - y)$$

Beide Grössen verhalten sich wie $\varepsilon - 1 : \varepsilon$, ein unter allen Temperaturen beständiges Verhältniss. Es ist das, welches Laplace und Poisson das Verhältniss der W ä r m e k a p a c i t ä t b e i g l e i c h e n R ä u m e n, zu d e r j e n i g e n b e i g l e i c h e n E l a s t i c i t ä t e n nennen und auf die E r f a h r u n g G a y - L u s s a c s gestützt für constant halten, wodurch also unsere theoretische Entwicklung zum Theil bestätigt wird. Den unbestimmten Ausdruck „W ä r m e k a p a c i t ä t“ haben wir bis jetzt absichtlich vermieden, obgleich sich in der That der grösste Theil dieser Arbeit damit beschäftigt, welches man gewöhnlich darunter versteht. Die Ursache davon ergibt sich aus dem Inhalte.

Wo die Temperaturen gleich sind, aber Elasticität und specifisches Gewicht verschieden

$$= A\,\frac{\alpha}{\varepsilon - 1}\log\frac{El.y}{El.x} = A\,\frac{\alpha}{\varepsilon - 1}\log\frac{Sp.y}{Sp.x}$$

Wenn die Wärmemengen gleich sind, so ist

$$y - x = \frac{\alpha}{\varepsilon - 1}\log\frac{Sp.y}{Sp.x} = \frac{\alpha}{\varepsilon}\log\frac{El.y}{El.x}\ \text{wie §. 16.}$$

22.

Durch die Erkältung eines Gases um einige Grade wird ihm eine gewisse Menge Wärme entzogen, die für alle Temperaturen dieselbe ist. Hier sind nun zwei Fälle möglich; entweder der Verlust geht bis ins unendliche, und die Menge Wärme ist in jedem Gase $= \infty$, oder sie hört plötzlich auf, und der Körper verliert einen Theil seiner Eigenschaften. Eine Mittelstufe ist nicht möglich, da die Quantität der verlornen Wärme nicht wie bei festen Körpern immer mit der Temperatur abnimmt, und die Scale bis ins unendliche hinab- wie hinauf geht. Es ist der letzte Fall, der an sich wahrscheinlicher und durch Versuche bewährt ist. Einige Gase, nachdem sie ohne Aenderung der Dichtigkeit bis auf einen gewissen Grad abgekühlt sind, hören theilweise plötzlich auf, Gase zu seyn, werden starr oder flüssig oder gehen irgend einen andern chemischen Zustand ein, als in dem sie sich bisher befanden. Was bei einigen erwiesen ist, findet ohne Zweifel bei allen Statt, da alle Gase eine so ähnliche Gruppe von Körpern bilden, dass man nicht einen so unermesslichen Unterschied zwischen ihnen annehmen kann, als eine endliche und unendliche Menge Wärme seyn würde: Alle Gase von einem constanten specifischen Gewichte verlieren daher durch Abkühlen einen Theil ihrer Wärme, bis diese bei einer Temperatur, die von der chemischen Beschaffenheit und dem specifischen Gewichte abhängt, völlig erschöpft ist, wo sie ihren Zustand plötzlich ändern. Es versteht sich, dass hierbei dem Körper nicht

alle Wärme entzogen zu werden braucht, allein der Ueberrest folgt anderen Gesetzen. Man kann diese dem Gase nothwendige Wärme, deren völlige Entziehung auch die Zerstörung des Gases nach sich zieht, die Gaswärme nennen. Ihre wesentliche Verschiedenheit von der Verdampfungswärme ist einleuchtend; diese wird der Gegenstand einer andern Untersuchung seyn.

23.

Die Temperatur, wobei irgend ein Gas, dessen specifisches Gewicht Sp.x ist, alle seine Wärme verloren hat, sei x, so wird es bei einer niedrigeren Temperatur nur dann bestehen können, wenn seine Dichtigkeit eine angemessene Verminderung erleidet, und dadurch Wärme von den umgebenden Körpern aufgenommen wird. Ist der Raum beschränkt, so dass das Gas sich nicht ausdehnen kann, so wird sich so viel davon niederschlagen, dass der Ueberrest die angemessene Dichtigkeit hat. Da Gase, wobei

$$y - x = \frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{Sp.y}{Sp.x}$$

gleich viel Wärme enthalten, so gibt

$$\frac{Sp.y}{Sp.x} = \left(\frac{1 + hv}{1 + h\bar{\varepsilon}}\right)^{\varepsilon - 1}$$

für die Temperatur v dasjenige specifische Gewicht an, welches jenem Gränzpuncte oder Minimum entspricht, wenn Sp.x das specifische Gewicht des Gases bei der Temperatur $\bar{\varepsilon}$ ist.

Die Menge der Gaswärme eines Gases von Sp.y und y° G. ist

$$= A\ M\ (x - y) + \frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{Sp.y}{Sp.x}$$

22.

Durch die Erkältung eines Gases um einige Grade wird ihm eine gewisse Menge Wärme entzogen, die für alle Temperaturen dieselbe ist. Hier sind nun zwei Fälle möglich; entweder der Verlust geht bis ins unendliche, und die Menge Wärme ist in jedem Gase $= \infty$, oder sie hört plötzlich auf, und der Körper verliert einen Theil seiner Eigenschaften. Eine Mittelstufe ist nicht möglich, da die Quantität der verlornen Wärme nicht wie bei festen Körpern immer mit der Temperatur abnimmt, und die Scale bis ins unendliche hinab- wie hinauf geht. Es ist der letzte Fall, der an sich wahrscheinlicher und durch Versuche bewährt ist. Einige Gase, nachdem sie ohne Aenderung der Dichtigkeit bis auf einen gewissen Grad abgekühlt sind, hören theilweise plötzlich auf, Gase zu seyn, werden starr oder flüssig oder gehen irgend einen andern chemischen Zustand ein, als in dem sie sich bisher befanden. Was bei einigen erwiesen ist, findet ohne Zweifel bei allen Statt, da alle Gase eine so ähnliche Gruppe von Körpern bilden, dass man nicht einen so unermesslichen Unterschied zwischen ihnen annehmen kann, als eine endliche und unendliche Menge Wärme seyn würde: Alle Gase von einem constanten specifischen Gewichte verlieren daher durch Abkühlen einen Theil ihrer Wärme, bis diese bei einer Temperatur, die von der chemischen Beschaffenheit und dem specifischen Gewichte abhängt, völlig erschöpft ist, wo sie ihren Zustand plötzlich ändern. Es versteht sich, dass hierbei dem Körper nicht

alle Wärme entzogen zu werden braucht, allein der Ueberrest folgt anderen Gesetzen. Man kann diese dem Gase nothwendige Wärme, deren völlige Entziehung auch die Zerstörung des Gases nach sich zieht, die Gaswärme nennen. Ihre wesentliche Verschiedenheit von der Verdampfungswärme ist einleuchtend; diese wird der Gegenstand einer andern Untersuchung seyn.

23.

Die Temperatur, wobei irgend ein Gas, dessen specifisches Gewicht Sp.x ist, alle seine Wärme verloren hat, sei x, so wird es bei einer niedrigeren Temperatur nur dann bestehen können, wenn seine Dichtigkeit eine angemessene Verminderung erleidet, und dadurch Wärme von den umgebenden Körpern aufgenommen wird. Ist der Raum beschränkt, so dass das Gas sich nicht ausdehnen kann, so wird sich so viel davon niederschlagen, dass der Ueberrest die angemessene Dichtigkeit hat. Da Gase, wobei

$$y - x = \frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{Sp.y}{Sp.x}$$

gleich viel Wärme enthalten, so gibt

$$\frac{Sp.y}{Sp.x} = \left(\frac{1+hv}{1+h\varepsilon}\right)^{\varepsilon - 1}$$

für die Temperatur v dasjenige specifische Gewicht an, welches jenem Gränzpuncte oder Minimum entspricht, wenn Sp.x das specifische Gewicht des Gases bei der Temperatur ε ist.

Die Menge der Gaswärme eines Gases von Sp.y und y° G. ist

$$= A\,M\,(x-y) + \frac{\alpha}{\varepsilon - 1} \log \frac{Sp.y}{Sp.x}$$

wenn M die Masse des Körpers ist und x^2 und Sp.x sich aufs Minimum beziehen.

Wir enthalten uns hier aller Zusammenstellung mit andern physikalischen Erscheinungen, deren dem kundigen Leser gewiss mehrere gegenwärtig seyn werden, machen jedoch auf den engen Zusammenhang aufmerksam, in welchem alle diese Erscheinungen mit einander stehen, und dass wenn die an sich wahrscheinlichen und durch manche Versuche bestätigten Grundsätze richtig sind, auch die so unerwarteten Resultate zugegeben werden müssen; sollten diese auch anfangs nicht mit allen Beobachtungen übereinzustimmen scheinen.

24.

Die oben entwickelten Gesetze haben für alle elastisch-flüssigen Körper ihre Anwendung; die sogenannten permanent elastischen Gase sowohl als die Dämpfe, so lange diese den Punct ihres Minimums nicht überschritten haben. Allein die Constanten α, ε und A möchten vielleicht für die verschiedenen Gase verschieden seyn.

Bei allen Gasen wird aber die Elasticität auf gleiche Weise durch die Temperatur erhöht, d. h. α ist für alle Gase constant, wie diese Grösse es für alle Dichtigkeiten eines Gases war (§. 1.).

Auch ε scheint von der Natur der Gase eben so unabgängig zu seyn wie α, so dass die Annahme des §. 14 für alle gasförmige Körper ohne Unterschied ihre Anwendung findet. Der Versuche, wodurch dieses wahrscheinlich gemacht wird, sind mehrere; wir werden davon bei der Lehre von der Verdampfung reden.

25.

Die absolute Menge Wärme, die ein Gas verlangt, um eine gewisse Veränderung in seiner Temperatur und Elasticität zu erleiden, übergehen wir; desto merkwürdiger ist aber die verhältnissmässige Grösse von A in verschiedenen Gasen. Es ist Haycraft, der sich das Verdienst erworben hat, das schon von Dalton und Andern vermuthete Gesetz, welchem aber spätere Versuche von Delaroche und Bérard, Clèment und Desormes und Andere zu widersprechen schienen, über alle Zweifel zu erheben, und zu gleicher Zeit die Unzuverlässlichkeit von Versuchen über Gase und Dämpfe darzuthun, wobei die wichtigste Bedingung, die Entfernung der Feuchtigkeit nicht beobachtet ist. Die Zusätze, welche Gay-Lussac in seinen Annalen der Abhandlung Haycraft beigegeben hat, bestätigen die Unrichtigkeit der Annahmen Delaroches und die Richtigkeit der von Haycraft nur noch mehr. Dieser fand:

dass alle Gase, chemisch einfache oder zusammengesetzte oder Gasgemenge (Hydrogen, Kohlensäure, atmosphärische Luft) gleich viel Wärme verlieren, wenn ihre Temperaturen und Räume gleich gross sind. Was nun für eine bestimmte Elasticität und Temperatur gefunden ist, ist natürlich für alle Elasticitäten und Temperaturen wahr. Unter gleichen Räumen Gas wurde die Gasmenge verstanden, die, wenn sie gleiche Volumen einnehmen, bei gleichen Temperaturen gleiche Elasticitäten haben. Setzen wir dafür der Abkürzung wegen Pp (Proportion), so ist die vollständige Gleichung für die Wärmemenge der Gase

$$\frac{AM}{B}\left(x - y + \frac{\alpha}{s - 1}\log\left(\frac{Sp.y}{Sp.x}\right)\right),$$

wo M sich bloss auf das Mass der Wärme bezieht, A die Masse ist, Pp die Proportion — die wir hier immer dem Raume proportional annehmen — x und y die Temperaturen in geometrischen Graden, Sp.x und Sp.y die specifischen Gewichte des Gases in der Temperatur x und y. Beziehen sich Sp.x und x aufs Minimum, so drückt obige Formel die absolute Wärmemenge aus, widrigenfalls nur die Differenz.

Gleiche Proportionen Gas bedürfen gleich viel Wärme, wenn sie um eine gewisse Anzahl geometrischer Grade erhoben werden sollen, so verschieden auch ihre Dichtigkeiten, ihre Massen, Elasticitäten, Temperaturen und Bestandtheile seyn mögen. Dass übrigens jene Proportionen mit weit grösserem Rechte für die chemische Verhältnisszahl angenommen werden, als die Verhältnisszahlen von Berzelius, oder Wollaston u. a., wie auch von Einigen geschehen ist, hoffen wir bei anderer Gelegenheit durch einige thermische und krystallographische Erfahrungen bewähren zu können. Dass man sie bei den meisten Körpern nur durch Vermischung auffinden kann, schadet der Theorie nicht.

26.

Die Gasgemenge verhalten sich analog zu einfachen Gasen. Ihre Eigenschaften können aus der Thatsache abgeleitet werden, dass wenn zwei Gase von gleicher Temperatur und Elasticität, aber verschiedener chemischer Beschaffenheit und Masse unter

einander gemischt werden, so dass sie jetzt einen Raum einnehmen, welcher der Summe ihrer bisherigen gleich ist, das Gemenge an Temperatur und Elasticität den einzelnen Gasen gleich ist. Hieraus folgt unmittelbar folgendes Gesetz:

Die Menge der in einem Gasgemenge, deren Elasticität $=$ El, deren Temperatur $= x$ ist, enthaltenen Wärme, ist gleich der Summe der Wärmemengen, die jeder einzelne Bestandtheil haben würde, wenn er einen solchen Raum einnimmt, dass seine Elasticität und Temperatur $=$ El und x ist. Dass ihre Ausdehnung durch die Wärme und ihre Capacität sie nicht von den einfachen Gasen unterscheidet, ist durch directe Versuche bei der atmosphärischen Luft und bei Gemengen von Wasser- und andern Dämpfen mit Gasen bewiesen.

27.

Zu den Formeln des §. 21 wollen wir noch einige Beispiele fügen, die aber für alle einfache und gemengte Gase anwendbar sind.

Aus Gründen, die zu einer andern Zeit entwickelt werden sollen, scheint ε nicht weit von 12 entfernt zu seyn. Um das Gas um 1° abzukühlen, ist daher eine Ausdehnung von etwa 0,0358 oder etwas mehr als $\frac{1}{30}$ nöthig. Die Elasticität sinkt dabei auf etwa $\frac{1}{1,0359}$ herab.

Eine Ausdehnung auf einen doppelten Raum drückt die Temperatur um etwa 20°; auf einen dreifachen um 31°, einen vierfachen 40°, einen fünffachen 46°, einen sechsfachen 51°, einen achtfachen etwa 60° herab. Um eben so viel Grade wird die Temperatur bei der Zusammendrückung erhöht.

Einer doppelten Elasticität entspricht eine Tem-

peraturerhöhung von ungefähr 18°, einer dreifachen 29°, einer vierfachen 36°, einer fünffachen 42°, einer sechsfachen 47°, einer achtfachen 54°.

28.

Diese Grössen sind weit geringer als man erwarten sollte, da sich schon bei einer fünffachen Zusammendrückung Feuerschwamm entzündet. Allein erstlich drücken jene Grössen nur aus, dass die ganze Gasmenge um diese Temperatur erhoben wird, da sich aber ein grosser Theil der entweichenden Wärme auf dem Schwamm concentrirt, so ist es eben so wohl möglich, dass dieser ungleich stärker erwärmt wird, als 46°, da eine hohe Wärmeintensität auf einer grossen Masse verbreitet, oft nur eine geringe Temperaturveränderung hervorbringt. Weit bedeutender ist aber die Wärme, welche durch das vom Schwamme absorbirte Gas frei wird. Schwamm absorbirt die Gase in Menge; nach bekannten Gesetzen von einem fünffach verdichteten Gase ein fünfmal so grosses Gewicht. Die ganze dadurch reel entwickelte Wärme strebt die Temperatur des Schwammes zu erhöhen, der einmal entzündet auch in der verdünnten Luft fortbrennt. Die durch Absorption entweichende Wärme ist übrigens völlig der Verdampfungswärme analog, und es möchte nicht schwer seyn, zu beweisen, dass von Flüssigkeit absorbirte Gase sich ganz wie aufgelöste Salze oder beigemengte Flüssigkeiten verhalten, und sich von ihnen nur in der Menge und in der grösseren Leichtigkeit, den elastisch flüssigen Zustande anzunehmen, unterscheiden, und die Gase nach denselben Gesetzen von porösen Körpern verschluckt wer-

den wie Wasserdampf und Wasser selbst. Die Körper werden in dem ersten Falle flüssig, in dem zweiten vielleicht starr, verschlucken dabei die Flüssigkeitswärme und bringen Kälte hervor, oder entwickeln die Verdampfungswärme und bringen Wärme hervor.

29.

Vermischt man ein Volumen Gas, dessen Elasticität = El und dessen specifisches Gewicht = Pp und die Temperatur = o ist, mit einem andern gleichen Volumen von derselben Elasticität, dem specifischen Gewichte Pp′ und der Temperatur 100°; so entsteht ein Gasgemenge von derselben Elasticität, doppeltem Volumen und der Temperatur 50° G. = 46 C, also weniger als die Hälfte. Bei Gasen hatte dieses noch nicht genau beobachtet werden können; ich erinnere aber an die bekannten Erscheinungen bei Mengung von Flüssigkeiten.

II. Bildet sich beim Löschen des gebrannten Kalks Ammoniak? Verneinend beantwortet von Doctor Pleischl, k. k. Professor der Chemie an der Universität in Prag.

Theodor von Grotthuss behauptet, (Schweiggers Journal B. 14. 146.) dass beim Löschen des Kalks Ammoniak gebildet werde. Er sagt hierüber Folgendes:

„In der Glühhitze, in welcher der Kalk gebrannt wird, kann das gemeine Oxyd, d. h. der Kalk eine angehende Desoxydation erlitten haben. Bei der Löschung mit Wasser kann nur die gewöhnliche Oxy-

dationsstufe, theils auf Kosten des Sauerstoffs im Wasser, theils vermittelst der in dem porösen Kalk stets enthaltenen atmosphärischen Luft wieder hergestellt werden. Im erstern Fall müsste der Wasserstoff des Wassers gasförmig frei werden. Diess erfolgt nun zwar nicht, allein es scheint, dass der Wasserstoff sich während seiner Entstehung mit dem Stickstoff der atmosphärischen Luft, (welche sowohl im porösen Kalk, als auch im Wasser selbst stets enthalten ist) zu Ammoniak verbindet; denn der sich bei dem Löschen des Kalks entwickelnde alkalische Dunst, der die blauen Pflanzenfarben in grün umwandelt, kann wohl nur dem Ammoniak zugeschrieben werden, da wir bis jetzt kein anderes in dieser Temperatur flüchtiges Alkali kennen."

Diese Behauptung, die mir bei der Arbeit: Ueber Schwefel- und Azotgehalt mehrerer Vegetabilien, sehr wichtig war, veranlasste mich einige Versuche anzustellen, um über die Statt finden sollende Ammoniakbildung Gewissheit zu erhalten. Da meines Wissens noch Niemand durch Versuche sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Behauptung überzeugte, so dürfte die nähere Anführung meiner Versuche hierüber nicht ganz zwecklos seyn.

Ich nahm zuerst bei meinem Versuche einen gebrannten Kalk, der schon 6 Tage an der freien Luft lag, weil ich keinen frischern hatte, in dessen Zwischenräume die atmosphärische Luft Zeit genug hatte einzudringen, übergoss ihn mit Wasser und als er heftig dampfte, hielt ich in einer geringen Entfernung befeuchtetes rothes Lakmuspapier in die häufig entweichenden heissen Dämpfe mit der Vorsicht, dass

keine mechanisch mit fortgerissenen Kalktheilchen das Lackmuspapier treffen konnten, sah aber keine Spur einer Farbenveränderung.

Diesen Versuch wiederholte ich mit der Abänderung, dass ich frisch gebrannten Kalk nahm, ihn in ein Cylinderglas brachte, mit destillirtem Wasser übergoss, und als er heftig dampfte, die Mündung des Gefässes mit Kork, — welcher durchbohrt war und eine 7 Zoll lange, und an dem einen Ende sehr enge Glasröhre aufnahm — verschloss, wobei die Dämpfe nur durch die enge Glasröhre entweichen konnten, ohne das etwa vorhandene Ammoniak in der Luft eher zerstreuen zu lassen, als es auf das Pflanzenpigment gewirkt hatte. Der Erfolg war, dass die Dämpfe nur sehr schwer die Mündung der Glasröhre erreichten, der grösste Theil derselben verdichtete sich, und schlug sich als Wasser an den Seiten des Cylinders und der Röhre nieder, und rieselte in Tropfen wieder auf den Kalk zurück.

Man nahm daher jetzt ein kurzhalsiges Kölbchen, verschloss die Mündung desselben mit einem durchbohrten Korkstöpsel, der ein 3 Zoll langes enges Glasröhrchen aufnahm, brachte Kalk hinein, und übergoss ihn mit der nöthigen Menge destillirten Wassers, um den Kalk in staubiges Kalkhydrat zu verwandeln, und verschloss die Mündung mit dem vorgerichteten Korkstöpsel.

Als die Dämpfe in der Glasröhre sichtbar wurden, und langsam heraustraten, zeigte darüber gehaltenes befeuchtetes rothes Lackmuspapier keine Farbenveränderung; als aber die Dampfentwickelung sehr heftig wurde, färbte sich das Lackmuspapier an der von den

Dämpfen getroffenen Stelle blau, Rosenpapier schwach grün, und Curcumäpapier rothbraun. Doch sah ich bei allen 3 gefärbten Papieren, dass die Farbenveränderung sehr scharf begränzt war, sich nicht allmälig verlor und keine unmerkbaren Uebergänge bildete, wie das sonst bei Ammoniakdämpfen der Fall zu seyn pflegt.

Bei dem Lackmuspapier hätte man die Herstellung der blauen Farbe mit Hr. Professor Libig *) der Einwirkung der heissen Wasserdämpfe zuschreiben können, allein bei dem Curcumä- und Rosen-Papier fällt dieser Erklärungsgrund weg; man muss daher annehmen, dass entweder nach v. Grotthuss Ammoniak wirklich gebildet wurde und entwich, oder dass die Wasserdämpfe sehr feine Kalktheilchen mit sich fortrissen, und dass diese Kalkstäubchen die alkalische Reaction auf die Pflanzenpigmente hervorgebracht haben.

Um dieses auszumitteln, wurde das vorige Kölbchen gereinigt, frischer Kalk hineingethan und so viel Wasser darüber gegossen, dass sich ein feuchtes Kalkhydrat bilden konnte, und das Kölbchen etwas schief gelegt. Die Erhitzung war in diesem Falle zwar nicht so hoch als vorher, doch stieg die Temperatur so weit, dass das Glaskölbchen ohne schmerzhaftes Gefühl mit blosser Hand nicht gehalten werden konnte. Die Dämpfe zeigten sich ziemlich häufig, und kalte darüber gehaltene Körper beschlugen sich mit Wasserdunst, doch weder rothes befeuchtetes Lackmus- noch

---

*) Buchner's Repertor. f. d. Pharmacie B. 15. 369 und Gilberts Annal. d. Phys. B. 75. 399.

Rosen - und Curcumä - Papier zeigten diessmal eine Farbenveränderung, selbst dann nicht, als der Kork mit dem Glasröhrchen entfernt worden, und das Papier unmittelbar in die aus der Mündung des Glaskölbchens hervorkommenden Dämpfe gehalten wurde. Als jedoch etwas gepulverte Sassaparille dazugebracht wurde, färbte sich das rothe Lackmuspapier sichtbar blau.

Man brachte in ein 8 Zoll tiefes und 2 Zoll weites Cylinderglas gebrannten Kalk, goss destillirtes Wasser darauf, und hielt in die entweichenden Dämpfe im Glase versenkt befeuchtetes rothes Lackmus - Rosen - und Curcumä-Papier mit einem Glasstab hinein. Das rothe Lackmuspapier fing zuerst an blau zu werden. Beim Herausnehmen war das Lackmuspapier so ziemlich gleichförmig blau gefärbt, doch war es auch hie und da nur getupft blau, und das getiegerte gesprenkelte Ansehen der zwei andern gefärbten Papiere zeigte ganz deutlich, dass bloss die mechanisch mit fortgerissenen Kalktheilchen die Ursache dieser Farbenveränderung waren, wofür überdiess noch der Umstand spricht, dass die Wände des Glases in ihrer ganzen Höhe mit Kalktheilchen bestäubt waren.

Bei Wiederholung des Versuches im schiefgelegten und mit dem engen Röhrchen versehenen Glaskölbchen hielt man das rothe Lackmuspapier zuerst vor die Mündung des Glasröhrchens, so, dass die herausfahrenden Dämpfe mit demselben einen rechten Winkel bildeten, und es wurde blau; hielt man aber das Papier mit den ausströmenden Dämpfen parallel und etwa eine Linie höher, so dass es von ihnen nicht unmittelbar getroffen werden konnte, aber den-

noch mit ihnen in Berührung war, so veränderte es seine Farbe nicht.

Man nahm jetzt eine Phiole, deren Hals 14 Zoll lang war, versah sie mit einer zweimal gebogenen Röhre und bemerkte die oben bereits angeführten Erscheinungen, nur sah man hier nach dem Aufhören der Dampfentwicklung ganz deutlich, dass in der Glasröhre Kalk sich abgelagert hatte, ja es bildete sich milchiges Kalkwasser. Bei zweimaliger Wiederholung mit einigen Abänderungen erhielt man dasselbe Resultat.

Um noch sicherer zu verfahren, schloss man die langhalsige Phiole mit einer 3mal im Zickzack gebogenen Röhre, und hielt jetzt ein Bündel von befeuchtetem rothen Lackmuspapier gerade vor die Mündung der Röhre so, dass die heftig ausströmenden Dämpfe unmittelbar auf das Reagenspapier treffen mussten; aber jetzt konnte man auch bei mehrmaliger Wiederholung des Versuches keine Spur einer Farbenänderung mehr bemerken. In den Krümmungen fand man eine trübliche Flüssigkeit, welche herausgenommen einen Bodensatz gab. Die klare überstehende Flüssigkeit reagirte alkalisch, wurde durch kohlensaures Ammoniak und kleesaures Kali weiss gefällt; und war mithin Kalkwasser. Nach dem Trocknen sah man in den Krümmungen der Röhre, besonders in der ersten einen weissen Rückstand, der Aetzkalk war, welchen die Wasserdämpfe mechanisch mit fortrissen und der in den vorigen Versuchen, wo er nicht zurückgehalten wurde, immer die alkalische Gegenwirkung der Dämpfe bewirkte.

Um endlich zu einem Endresultat zu gelangen,

und um apodiktische Gewissheit zu erhalten, wurde dieselbe Phiole mit Kalk gefüllt, und die entweichenden Dämpfe mit mässig verdünnter Salzsäure in Einwirkung gesetzt. Als die Dämpfe zu gehen anfingen, bemerkte man keine weisse Nebel, eben so wenig während der heftigen Dampfbildung noch nach derselben. Man wechselte den Kalk dreimal, und liess die entweichenden Dämpfe durch dieselbe Salzsäure absorbiren, um sie mehr zu sättigen. Die Flüssigkeit wurde bei gelinder Wärme abgedampft. Es blieb ein sehr geringer Rückstand, der sich gegen die Reagentien wie salzsaurer Kalk verhielt; dass es nicht Salmiak war, beweisst schon die einzige Eigenschaft, dass dieser Rückstand feuerbeständig war, und ausgeglüht werden konnte, ohne sich zu verflüchtigen.

Schluss.

Man entschuldige gefälligst die Aufzählung der einzelnen Versuche, sie geschah bloss um zu zeigen, ob der Verfasser zu dem Schlusse berechtiget sey: dass beim Löschen des gebrannten Kalks kein Ammoniak gebildet werde.

III. Darstellung der neuesten Untersuchungen über die Bewegung einer Magnetnadel durch Einfluss schnell bewegter Metalle.

Die Leser dieser Zeitschrift haben im zweiten Hefte des ersten Bandes derselben eine kurze Darstellung der Erfahrungen gefunden, die über den Ein-

fluss der Bewegung auf magnetische Erscheinungen bis zur Zeit, wo jenes Heft erschien, bekannt wurden. Seit dieser Zeit ist einiges über denselben Gegenstand, das früher nur auszugsweise in ausländischen Zeitschriften erschienen, in extenso bekannt geworden, wie z. B. Christie's Arbeiten, anderes ist durch den Scharfsinn und den Fleiss der Physiker an neuen Erfahrungen zugewachsen; auch hat man den theoretischen Gründen dieser merkwürdigen Erscheinungen mehr auf die Spur zu kommen gesucht. Eine kurze Darstellung dieser Gegenstände ist der Zweck dieses Aufsatzes, der mit dem im Bd. I. Hft. 2 enthaltenen fast alles Wesentliche enthält, was hierüber gearbeitet worden ist.

1.

Christie's Erfahrungen über den Einfluss des Rotirens einer Eisenscheibe auf eine Magnetnadel.

(Pilosoph. Transact. 1825.)

Christie hat ausser den in der genannten Abhandlung (B. I. S. 131.) im Allgemeinen angeführten Versuchen auch noch andere sehr interessante über den Einfluss des schnellen Rotirens einer eisernen Scheibe auf eine Magnetnadel angestellt. Er bediente sich dazu des Apparates, der in Fig. 1 abgebildet ist. T ist ein horizontales auf drei Füssen ruhendes Postament, womit ein verticaler Träger FK so verbunden ist, dass er sich um eine verticale Axe drehen, und mittelst einer Schraube in jeder Lage festgemacht werden kann, stets aber seinen Stand mittelst eines Zeigers,

angibt, der auf der horizontalen eingetheilten Platte K spielt. Am oberen Ende trägt er die Büchse der Magnetnadel, und ist so eingerichtet, dass das Tischchen, worauf sie steht, erhöht oder erniedriget und auch in jeder Höhe festgestellt werden kann. Die Magnetnadel hat ein Achathütchen, und schwebt 0. 7. Z. über dem Boden der Büchse, der mit einer kreisrunden in Viertelgrade getheilten Metallscheibe von 6 Z. Durchmesser versehen ist. Die Nadel lauft in feine Spitzen aus und man kann bei einiger Uebung leicht jede Ablenkung bis auf 2 Minuten angeben. In G ist der Körper doppelt durchbrochen, so dass von einer Seite der kupferne Ring SQNA durch ihn gehen und mittelst Stellschrauben in jeder Lage befestiget werden kann. Dieser Ring besteht aus zwei Theilen. Der eine Theil SQN bildet einen Halbkreis von 18 Z. Durchmesser, 2. 15 Z. Breite und 0. 3 Z. Dicke, der andere stellt gleichsam den zweiten Halbkreis vor, ist aber durchbrochen so, dass er 2 Bögen bildet, wovon der äussere 1. 2 Z. breit und 0. 22 Z. dick, der innere aber 0. 9 Z. breit und 0. 22 Z. dick ist. Beide Theile sind mit einander durch starke Metallstiften Ss und Nn verbunden, jedoch so, dass sich der Theil SAN um dieselben drehen lässt, während SQN befestiget ist; durch eine Oeffnung G im Körper sieht man diesen Ring und ein Zeiger g gibt die Neigung seiner Axen gegen den Horizont an. Beide Theile sind von A und Q gegen S und N hin in Grade getheilt, so wie der innere Theil san von a gegen s und n. Auf der Ebene des Ringes SQNA steht eine runde ebenfalls eingetheilte Platte kr senkrecht, deren Mittelpunct in die Axe von Ss fällt, und welche an dem beweglichen Theil SAN befe-

stiget ist. Ein bei x angebrachter Zeiger gibt den Winkel an, den SAN mit der Ebene SQN macht. In dem ausgebrochenen Theil des breiteren Ringes passt ein Arm Bb, der nach unten aus 2 Stücken besteht, die den Bogen SAN umfassen, durch Stellschrauben in jeder Neigung gegen den Horizont befestiget werden kann, und zur Aufnahme der Eisenplatte Cc dient. Die Axe dieses gegen Bb zu cylindrischen Armes ist stets gegen den Mittelpunct des Metallringes SQNA gerichtet. Bb trägt die um ihre Axe bewegliche eiserne Scheibe Cc, die durch ein Holzstück D angedrückt ist, das eine Art Rolle und einen Stift trägt und damit in eine Höhlung in Bb passt. Es ist durch ein Gegengewicht equilibrirt. Denkt man sich um den Mittelpunct der Magnetnadel eine Kugelfläche beschrieben, so kann man die Puncte dieser Fläche, welche von der verlängerten an ihrem Schwerpunct aufgehängten, und übrigens frei schwebenden Magnetnadel getroffen werden, als die magnetischen Pole, die sie verbindende gerade Linie als die Axe und den grössten darauf senkrecht stehenden Kreis als Aequator betrachten. Demnach ist die jedesmalige Lage der Metallplatte Cc durch die magnetische Länge und Breite bestimmt; die erstere wird von dem Puncte an gemessen, wo an der Ostseite der Aequator AaQ den Horizont HO schneidet. Der Winkel, den die Axe mit HO machte, war den genauesten Beobachtungen gemäss nahe 70° 30′. Christie überzeugte sich zuerst von der Grösse der Ablenkung, welche die ruhende Platte an der Magnetnadel hervorbrachte, er nannte sie die absolute Ablenkung und dann von der Grösse derjenigen, die Statt fand, wenn die Platte gedreht wurde. Zuerst

ward der Mittelpunct der Platte in den magnetischen Meridian gestellt, ihre Ebene war auf diesem senkrecht und eine Tangente zu der Kugelfläche, in deren Mittelpunct sich das Centrum der Magnetnadel befand; die Platte drehte sich in ihrer eigenen Ebene, nur die Neigung ihrer Drehungsaxe gegen den Horizont wurde geändert, und bei jeder einzelnen die Ablenkung, die das Rotiren der Platte bewirkte, genau bezeichnet. Aus den numerischen Ergebnissen dieser Versuche zieht Christie folgende Resultate: Wenn sich der Mittelpunct der rotirenden Platte im magnetischen Pol befindet, so bewirkt das Rotiren derselben keine Ablenkung; je weiter der Mittelpunct vom magnetischen Pol absteht, desto grösser ist die durch das Rotiren bewirkte Ablenkung. Befindet er sich im Aequator, so ist die Ablenkung am grössten. Bei dieser Ablenkung der horizontal schwebenden Magnetnadel kommt es nicht auf die Lage des Mittelpunctes der Platte gegen ihre Pole und ihren Aequator an, sondern sie wird ganz von der Lage dieses Mittelpunctes gegen die Pole und den Aequator einer Neigungsnadel abhängig, deren Centrum mit dem der horizontal schwebenden zusammenfällt. Immer wird der Nordpol der Magnetnadel in der Richtung abgelenkt, welche der dem Südpole der magnetischen Sphäre zunächst liegende Rand der Platte einschlägt.

Wenn der Winkel der beiden um Ss und Nn beweglichen Halbkreise geändert wurde, ohne dass die Neigung der Axe Bb gegen den Horizont eine Aenderung erlitt, so bewegte sich der Mittelpunct der Platte in einem Parallelkreise, seine Ebene blieb aber noch immer eine Tangente zur magnetischen Sphäre.

In diesem Falle lehrt die Erfahrung, dass die vom Rotiren der Platte herrührende Ablenkung gleich Null ist, wenn sich ihr Mittelpunct in der Länge 0° oder 180° befindet, hingegen am grössten, wie diese Länge 90° oder 270° beträgt.

Durch eine geringe Abänderung im vorher beschriebenen Instrumente brachte es Christie auch dahin, Versuche für den Fall zu machen, wo der Mittelpunct der Platte im Aequator liegt, und sie sich in seiner Ebene drehte. Die Erfahruug lehrte, dass in diesem Falle das Rotiren der Platte keine Ablenkung der Magnetnadel hervorbringt, vorausgesetzt, dass man ganz kleine Bewegungen als Resultate der fast unvermeidlichen Adjustirungsfehler ansieht.

Durch eine andere kleine Abänderung im Instrumente konnte man es dahin bringen, dass die Axe der Platte horizontal stand, und senkrecht auf den magnetischen Meridian durch den Mittelpunct der Magnetnadel ging, während derjenige Arm, an welchem die Platte angebracht war, auf dem Nullpunct des Limbus stand. In diesem Falle konnte man durch eine Bewegung des Limbus um Ss und Nn bewirken, dass sich der Mittelpunct der Platte im magnetischen Meridian bewegte, und ihre Ebene noch immer durch den Mittelpunct der Magnetnadel ging.

Da zeigte sich gerade das Gegentheil von dem, welches Statt fand, wenn die Ebene der Platte die magnetische Sphäre berührte; es wuchs nämlich die Grösse der Ablenkung vom Aequator gegen den Pol, im Pol selbst war sie am grössten. Auch hier waren die Ablenkungen in gleichen Entfernungen vom Aequator so, dass es wieder nicht auf die Lage der

Pole der horizontal schwebenden, sondern auf die der Pole einer frei sich bewegenden Neigungsnadel ankam. Hatte der Mittelpunct der Platte eine nördliche Breite, so erfolgte die Ablenkung des Nordpoles der Nadel nach der Richtung, in welcher sich der innere Rand der Platte bewegte; nach entgegengesetzter Richtung hingegen, wenn die Nadel eine südliche Breite hatte. Man kann daher sagen: In jeder Breite erfolgte die Ablenkung des mit der Breite gleichnamigen Poles nach der Richtung, in welcher sich der innere Rand der Platte bewegte.

Oben wurde gesagt, dass in dem Falle, wo sich der Mittelpunct der Platte im magnetischen Meridian befand, und ihre Ebene die magnetische Sphäre berührte, das Nordende der Magnetnadel in der Richtung des südlichen Randes der Platte abgelenkt wurde, mithin nach einer Richtung, welche der desjenigen Randes der Platte entgegengesetzt ist, welcher mit dem Nadelende einerlei Namen führt. Bringt man die Platte im Gedanken von der Lage, wo sie sich im magnetischen Meridian bewegt, in die, wo sie die magnetische Sphäre berührt, indem man sich vorstellt, sie drehe sich um einen Durchmesser, der auf der Ebene des Meridians senkrecht steht, und zwar mit dem inneren Rande gegen den mit der Breite gleichnamigen Pol; so muss die Ablenkung der Magnetnadel, bei einerlei Richtung der Rotation ihre Direction wechseln, mithin muss es zwischen den beiden Grenzpositionen eine geben, wo keine Ablenkung Statt findet. Kommt aber die Platte von einer Lage in die andere, indem sie sich nach der entgegengesetzten Richtung dreht, so bleibt in beiden Grenzstationen

die Ablenkung der Magnetnadel dieselbe, und es gibt keine Zwischenstation, in welcher keine Ablenkung Statt findet.

Um untersuchen zu können, welche Ablenkung die Rotation bewirke, wenn sich der Mittelpunct der rotirenden Platte in einer Ebene befindet, die auf der des Aequators und des Meridians senkrecht steht, wurde der Bogen SQN so weit gedreht, dass der Zeiger in g auf 70° 30′ (die magnetische Neigung) wies, und dann der Limbus SAN mit dem Arm Bb unter einen rechten Winkel gegen SQN gestellt. Um das Centrum der Magnetnadel in der Ebene der Platte zu haben, wurde die Compassbüchse in der Richtung des Meridians bewegt. Die Resultate der bei dieser Einrichtung gemachten Versuche sind:

Die von der Rotation der Platte herrührende Ablenkung ist am grössten, wenn sich der Mittelpunct der Platte im Aequator befindet. Sie nimmt ab, so wie sich die Platte dem Pol nähert, und ist nahe bei 55° (das ist nahe die halbe Neigung der Magnetnadel) der Breite gleich Null. Zu beiden Seiten dieses Punctes wächst sie und erlangt in einer dem Pole entgegengesetzten Richtung wieder ein Maximum.

Gegen den Südpol und zu beiden Seiten des Punctes, dessen Breite 55° beträgt, weicht das Südende der Magnetnadel in der Richtung aus, in welcher sich der unterste oder nördliche Rand der Platte bewegt.

Vom Aequator gegen die Pole bis nahe an 55° der Breite wird der Südpol der Magnetnadel in der Richtung des südlichen Randes der Platte abgelenkt.

Das Eigenthümliche dieser Ablenkungen ist, dass zwei Maxima Statt finden, wenn der Mittelpunct der

Platte im Aequator steht, und zwei andere aber kleinere nach entgegengesetzter Richtung, wenn sich dieser Mittelpunct in einem Pole befindet: in 4 Puncten gibt es gar keine Ablenkung.

Nicht um diese Erscheinungen aus einer Hypothese zu erklären, sondern um alle Facta unter einen allgemeinen Gesichtspunct zu bringen, bezog Christie alle Ablenkungen der horizontal schwebenden Magnetnadel auf die einer Neigungsnadel, welche mit jener einerlei Mittelpunct hat, so dass, wie immer diese Magnetnadel durch die Platte abgelenkt werden mag, die horizontal schwebende stets mit ihr in einerlei Verticalebene erhalten wird. Wird demnach der Nordpol der horizontal schwebenden Nadel gegen West abgelenkt, so ist nach dieser Vorstellungsweise dieses die Folge davon, dass die Westseite des Aequators der Neigungsnadel gegen den Südpol der magnetischen Sphäre abgelenkt wurde. Es führte diese Art, die Phänomene anzusehen, zu dem Gesetze, dass die Ablenkungen der horizontalen Magnetnadel stets so erfolgen, als wenn die Seiten des Aequators der substituirten Neigungsnadel nach einer Richtung abgelenkt würden, welche der Richtung des dem Pol nächsten Randes der Platte entgegengesetzt ist.

Directe Versuche mit einer genau gearbeiteten Neigungsnadel bestätigten die Richtigkeit dieses Gesetzes.

2.

Arago's neue Versuche nebst einer Kritik älterer.

Annales de Chimie etc. Juin et Octobre 1826.

Die Herren Leopold Nobili und Bacelli zu

Modena haben in der Bibliothèque universelle einige Erfahrungen über magnetische von der Bewegung herrührende Phänomene bekannt gemacht *), welche mit den von Arago gemachten im directen Widerspruche stehen. Die genannten italienischen Gelehrten liessen nämlich Magnetnadeln über nicht metallischen Substanzen oscilliren und fanden keinen merklichen Unterschied bei den Oscillationen, sie mochten über diesen erfolgen, oder ihrem Einflusse ganz entzogen seyn. Arago rechtfertiget seine Resultate auf folgende Weise: Hätten, sagte er, die Physiker zu Modena die Distanz angegeben, welche ihre Nadel von der nicht metallischen Scheibe trennte, so würde ich vielleicht die Quelle ihres Irrthums angeben können, da aber dieses nicht geschah, so kann ich ihrer Aussage nur genaue Messungen entgegensetzen und die Umstände angeben, unter denen ich sie erhielt. Ich hing eine Magnetnadel über einer horizontalen Wasserfläche auf und entfernte sie um 53° von ihrer natürlichen Richtung; als ich sie sich selbst überlies, oscillirte sie um den magnetischen Meridian in immer kleiner werdenden Bögen. Ich suchte den Augenblick zu erhaschen, wo ihr halber Ausschlagwinkel 43° betrug und zählte von da an die Anzahl der Schwingungen. Betrug die Entfernung der inneren Fläche der Nadel vom Wasser 0^{mm}. 65 so verlor sie 10° bei 30 Schwingungen, betrug diese Entfernung aber 52mm, 2, so erlitt sie diesen Verlust erst in 60 Oscillationen. Bei einer so grossen Differenz kann man sich nicht täuschen. Ich setze noch dazu, dass sie noch

*) Die Leser dieser Zeitschrift fandan sie im zweiten Hefte des ersten Bandes. Seite 142 u. f.

grösser ausgefallen wäre, wenn ich von der Ausschlagsweite 90° ausgegangen wäre. Ueber Eis erhielt ich bei derselben Magnetnadel folgende Resultate:

Der Elongationsbogen nahm ab von 53° — 43° in der Entfernung von 0.m70 in 26 Oscillationen.

1.26	— 34	— —
30.5	— 56	— —
52.2	— 60	— —

Ueber einer Glasplatte (Kronglas) nahm er bei einer anderen Magnetnadel von 90° — 41° ab in der Entfernung von 0mm.91 in 122 Schwingungen

0.99	— 180	— —
3.04	— 208	— —
4.01	— 220	— —

Weit entfernt also, dass die magnetische Wirkung nicht metallischer Substanzen wie des Wassers, des Eises, des Glases, unbemerkbar wäre wie Nobili und Bacelli behaupteten, so ist vielmehr ihre Wirkung so intensiv, dass man hoffen darf, es werde sich bei gehöriger Sorgfalt sogar die der verdichteten Gase bemerken lassen.

Wiewohl man aber sieht, dass die Nähe nicht metallischer Substanzen den Schwingungsbogen einer Magnetnadel bedeutend vermindert, so bin ich doch sehr geneigt anzunehmen, dass der grösste Theil dieser Wirkung hier nicht von einer magnetischen Action abhängen kann. Es ist um so nothwendiger, über diesen Gegenstand Versuche im luftleeren Raume zu machen, da mir schien, als seyen selbst nicht magnetisirte Nadeln irgend einem Einflusse unterworfen; da die schwächende Wirkung des Glases, des Wassers, des Papiers von der der Metalle sehr verschieden und nur eine Flächenwirkung zu seyn scheint, so bleibt die Ro-

tation solcher Substanzen ohne Effect, so bald man sie durch einen Schirm von der Magnetnadel trennt.

Alle Physiker, Nobili und Bacelli mit einbegriffen, die sich mit den Phänomenen beschäftigen, welche vom Magnetismus bewegter Körper herrühren, erklären sich dieselben fast auf einerlei Weise. Sie sagen, wenn eine Magnetnadel horizontal über eine Metallplatte aufgehängt ist, so muss sich unter jedem Pole derselben, z. B. unter dem Nordpole, ein entgegengesetzter, also anziehender Pol bilden, der aus der Zersetzung des magnetischen Fluidums der Platte hervorgeht. Dreht sich nun die Platte, so zieht sie den Pol nach sich fort in der Richtung ihrer Bewegung, es bildet sich in der Magnetnadel ein neuer Pol, zieht dieselbe wieder mit sich und so fort. Nimmt man an, dass diese Pole durch Vertheilung des Magnetismus fast augenblicklich entstehen, aber einige Zeit brauchen, um wieder zu verschwinden, so gehen der Magnetnadel eine Reihe anziehender Pole voraus, die sie nach der Richtung der Bewegung der Platte von ihrer gewöhnlichen Richtung ablenken.

Diese Erklärung both sich mir (Arago) auch dar, als ich das erstemal die Rotationsversuche der Akademie mittheilte, ich erwähnte ihrer aber nicht; weil mir eine Hypothese, die nur über die Richtung der Ablenkung Rechenschaft gibt, nicht hinreichend begründet zu seyn schien. Nach meiner Meinung handelt es sich darum zu beweisen, wie eine Kupferplatte, die im Zustand der Ruhe eine Magnetnadel kaum um eine Secunde ablenkt, sie in derselben Entfernung bloss durch ihre Bewegung um 90° und mehr ablenken kann. Jetzt habe ich Ursache, mich meiner Zurückhaltung zu freuen;

denn neue Versuche haben gezeigt, dass diese Hypothese nicht nur unzulänglich, sondern den Resultaten der Erfahrung völlig zuwider sey. Dieses soll mit wenigen Worten gezeigt werden.

Die Südpole, welche nach der Theorie von Herschel, Babbage, Nobili, Prêvost etc. der Nordpol der Magnetnadel am Umfange der rotirenden Kupferscheibe hervorruft, müssen offenbar durch ihre vereinte Wirkung den Nordpol der Magnetnadel anziehen, und ihn der Platte zu nähern suchen; ich habe mich aber überzeugt, dass die Kraft, welche senkrecht auf die Platte wirksam ist, und aus allen durch die Bewegung hervorgerufenen Kräften resultirt, eine abstossende Kraft sey. Hängt man nämlich einen sehr langen Magnetstab mittelst eines Fadens in verticaler Richtung an eine Wage, stellt durch Gewichte von beliebiger Natur das Gleichgewicht her, und dreht dann die Kupferplatte unter dem Magnete; so wird das Gleichgewicht gestört, der Magnet hebt sich, also stosst ihn die Platte ab.

Noch leichter macht man diesen Versuch mit einer Neigungsnadel. Ist die Ebene derselben genau gegen den Mittelpunct der rotirenden Platte gerichtet, die ich immer als horizontal voraussetze, so kann die Bewegung um ihre Axe nur aus einer Kraft entspringen, die auf der Scheibe senkrecht steht. Entspricht aber nur ein einziger Pol der Magnetnadel in verticaler Lage der Platte, so findet man, dass so wie im vorigen Falle, der Pol der Nadel steigt.

Die Wirkung einer metallenen, kreisförmigen, horizontalen und um ihren Mittelpunct rotirenden Scheibe auf den Pol einer Magnetnadel lässt sich in

drei Kräfte zerlegen: die erste ist vertical oder senkrecht auf die Scheibe; die zweite horizontal und senkrecht auf die Verticalebene, die den Halbmesser enthält, in welchen die Projection des Poles der Magnetnadel fällt, die dritte ist mit diesem Halbmesser parallel. Die erste wirkt repulsiv, wie wir gesehen haben; die zweite ist tangential und bewirkt die Bewegung einer horizontal schwebenden Nadel; die Eigenschaft der dritten kann man kennen lernen, wenn man sich einer Neigungsnadel bedient, die vertical und so steht, dass ihre Drehungsaxe in einer Ebene enthalten ist, welche auf einem der Halbmesser der Scheibe senkrecht steht: in dieser Stellung bewegt sich die Nadel nur vermög der nach dem Centrum gerichteten Kraft.

Man nehme an, es entspreche eine ähnliche Magnetnadel vertical dem Mittelpuncte der sich drehenden Scheibe; diese wird durch Bewegung der Scheibe nicht abgelenkt. Es gibt einen zweiten, dem Rande der Scheibe näheren Punct, wo sich die Nadel auch vertical erhält. Zwischen diesen zwei Puncten, wird der untere Pol beständig gegen den Mittelpunct hingezogen, so schnell sich auch die Scheibe drehen mag; weiter davon wird er abgestossen. Die Wirkung ist auch noch merklich und zwar abstossend, wenn die verlängerte Richtung der verticalen Nadel schon über den Rand der Scheibe hinausfällt. Ich könnte fragen, wie diese repulsive Kraft längs des Radius von der Wirkung attractiver auf der oberen Fläche des Metalles vertheilter Pole abgeleitet werden könnte, wenn ich nicht das Unzureichende dieser Theorie schon durch den Beweis der Existenz ei-

ner abstossenden Kraft, die senkrecht auf die rotirende Scheibe wirkt, sattsam gezeigt hätte.

3.

Ampére's Versuche.

Man konnte wohl vermuthen, dass ein beweglicher Polardraht, welcher von einem kräftigen electrischen Strome durchflossen wird, und in Betreff der gewöhnlichen magnetischen Phänomene eine Magnetnadel vertreten kann, sich auch in der Nähe einer rotirenden Metallscheibe wie eine Magnetnadel verhalten werde. Ampére hat diesen Versuch zuerst mit Glück ausgeführt und darüber in der Sitzung der k. Akademie vom 4. September v. J. (Annales de Chimie. B. 33. S. 322) Bericht erstattet. Der Versuch, den mir Herr Ampére selbst zu zeigen die Güte hatte, ward mit einem schraubenförmig gewundenen, durch einen seidenen Ueberzug isolirt erhaltenen Drahte gemacht, der über einer kupfernen Scheibe aufgehängt war. Als man durch den Draht einen electrischen Strom leitete, der von einer Volta'schen Batterie kam, die aus 10 Elementen bestand, deren jedes etwa einen Quadratfuss Oberfläche hatte, und die Scheibe durch ein Räderwerk mittelst einer Kurbel schnell gedreht wurde, gerieth die Spirale in eine drehende Bewegung nach der Richtung der Rotation der Scheibe. Dasselbe erfolgte, nur in einem geringeren Grade, als eine hölzerne mit Stannifolio belegte Scheibe der kupfernen substituirt wurde.

4.

Poissons Theorie des Magnetismus in Bewegung.

(Annales de Chimie etc. Juillet. 1826.)

Poisson hat in zwei früheren Mémoiren, welche er der Akademie mittheilte, die Wirkung der durch Vertheilung magnetisirten Körper in dem Fall betrachtet, wo die beiden magnetischen Fluida, welche er der gewöhnlichen Vorstellungsweise gemäss, annimmt, im Inneren der Körper ins Gleichgewicht gekommen sind. Er betrachtet diese Fluida als unwägbar, nimmt an, dass von beiden in den des Magnetismus fähigen Körpern gleich viel enthalten sey, dass sie ihren Platz nur wenig ändern können, und einer gegenseitigen Wirkung unterliegen, die abnimmt wie das Quadrat der Entfernung wächst, zwischen den Theilen desselben Fluidum's repulsiv, zwischen denen der zwei verschiedenen Fluida hingegen attractiv ist. Arago's Versuche, welche lehren, dass der Magnetismus in bewegten Körpern mit anderer Intensität und nach ganz anderen Gesetzen wirkt, als wenn sie ruhen, veranlassten ihn, seine theoretischen Untersuchungen auch auf diesen Fall anzuwenden.

Sein Mémoire enthält vorläufig eine kurze historische Aufzählung dessen, was über diesen Punct aus der Erfahrung bekannt ist, und wie man es zu erklären gesucht hat, das aber hier übergangen wird, weil es der Leser dieser Zeitschrift ohnehin kennt; er geht dann über auf die Darstellung der Basis seiner Theorie, mit der auch hier der Anfang gemacht wird:

Die zwei Fluida, denen man die magnetischen Phänomene zuschreibt, sind wie die electrischen, unwägbar oder von so geringer Dichte, dass sie die Masse des Körpers, der sie enthält, nicht merklich vermehren. Man betrachtet sie aber doch als materielle Substanzen, die den allgemeinen Gesetzen des Gleichgewichtes und der Bewegung unterliegen, und auf den Körper vermög der gegenseitigen Wirkung ihrer Theile einen Druck ausüben, den man wie den schwerer Flüssigkeiten durch Gewichte misst, und durch welchen Körper in Bewegung gesetzt werden, wenn er nicht durch einen Gegendruck aufgehoben wird. Die Gesetze der Anziehung und der Abstossung zwischen ihren Theilen sind bei diesen Flüssigkeiten wie bei den electrischen. Das, wodurch sie sich wesentlich von einander unterscheiden, besteht darin, dass sich die beiden electrischen Fluida in Körpern, welche gute Leiter der Electricität sind, frei bewegen und theilweise oder ganz von einem Körper in einen anderen übergehen, während von mehreren Körpern, die durch Vertheilung magnetisirt sind, weder jeder einzelne noch ein wahrnehmbares Theichen derselben etwas verliert noch gewinnt, so mächtig auch die Kräfte seyn mögen, welche die Trennung der zwei heterogenen Fluida in ihrem Innern bewirken. Daraus schliesst man, dass die Verrückung der Theile dieser Flüssigkeiten beim Acte der Magnetisirung ganz unmerklich ist. Ich habe den kleinen Abschnitt der Körper, in denen sich die magnetischen Fluida bewegen können, und die von einander durch Theile getrennt sind, die der Magnetismus nicht durchdringen kann, magnetische Elemente genannt. Das Verhältniss der Summe ihrer

Werthe zum ganzen Rauminhalte des Körpers ist bei verschiedenen Stoffen auch verschieden, und dieses reicht hin zur Erklärung, wie diese Stoffe im Zustande der Ruhe unter dem Einflusse derselben äusseren Kräfte mehr oder weniger Magnetismus verrathen.

Dieses Verhältniss hängt auch von der Temperatur der Magnete ab; daher ändert sich auch die Stärke der magnetischen Wirkung mit dem Wärmegrade. Im Stahle und in anderen Stoffen, welche dauernden Magnetismus annehmen können, übt die Masse derselben eine besondere Wirkung auf die Theile des nördlichen und südlichen magnetischen Fluidums aus, die sich ihrer Trennung und nachher ihrer Wiedervereinigung widersetzt so, dass diese Substanzen nicht durch Vertheilung magnetisirt werden, und auch den einmal angenommenen Magnetismus nicht verlieren können, den sie durch ein anderwärtiges Verfahren erlangt haben, und wenigstens eine äussere Kraft auf diese Wirkung keinen Einfluss gewinnt. Diese Wirkung ist es, welche die Physiker zusammenhaltende Kraft (force corërcitive) nennen, und deren Wirkung man mit der der Reibung an Maschinen verglichen hat. In Substanzen, wo diese gar nicht oder in einem unmerklichen Grade enthalten ist, beginnt die Trennung der zwei Fluida und die magnetischen Erscheinungen äussern sich, so bald die geringste äussere Kraft zu wirken beginnt; man gibt aber doch zu, dass diese Substanzen auf die Theile des nördlich und südlich magnetischen Fluidums eine andere Wirkung ausüben, die dem Widerstande eines Mittels ähnlich ist, und die Bewegung der Flüssigkeiten im Innern der magnetischen Elemente verzögert, die in

verschiedenen Stoffen auch sehr verschieden seyn kann, und nach meiner Meinung ist es dieser besondere Widerstand und nicht die zusammenhaltende Kraft, von der abgesehen wird, die auf die magnetischen Phänomene bewegter Körper Einfluss hat.

Gesetzt nun, man nähere einen Magnet einer Materie, deren zusammenhaltende Kraft unmerklich ist, und deren magnetische Elemente in was immer für einem Verhältnisse stehen, so wird in diesen Elementen alsogleich die Zersetzung der neutralisirten Fluida beginnen und so lange anhalten, bis das frei gewordene Fluidum der äusseren Kraft das Gleichgewicht hält, welches stets eintreten wird, wenn diese Kraft an Grösse und Richtung beständig ist. Aendert sie sich aber beständig, welches der Fall ist, wenn der äussere Magnet seine Lage gegen die Elemente des seinem Einflusse ausgesetzten Körpers wechselt, so werden sich die beiden Fluida, statt in einen bleibenden Zustand zu kommen, in jedem Elemente mit einer Geschwindigkeit bewegen, die bei übrigens gleichen Umständen vom Widerstande abhängt, welche die Materie des Körpers ihnen in den Weg legt. In diesem Zustande kann man die in jedem Augenblicke Statt habende Anordnung der 2 Fluida in den magnetischen Elementen nicht bestimmen, aber doch einsehen, dass sie von der sehr verschieden ist, die beim Gleichgewicht Statt hat; es ist sogar möglich, dass während der Bewegung die Zersetzung des neutralen Fluidums sich auf die ganze Ausdehnung jedes Elementes erstreckt und in jedem dieser Puncte eine der beiden Flüssigkeiten im Ueberflusse vorhanden ist, während im Zustande des Gleichgewichtes

das zersetzte Fluidum auf die Oberfläche versetzt wird, wo es eine Schichte bildet, die im Vergleich mit den Dimensionen dieses Elementes sehr dünn ist. Die nach aussen erfolgende Wirkung eines dem Einflusse derselben Kräfte ausgesetzten Elementes würde also in beiden Fällen sehr verschieden ausfallen, da sie in dem einen nur von der Nähe der Oberfläche ausginge, im anderen aber aus allen Puncten des Volumens. Ich sage dieses nur, um die wahrscheinliche Ursache der Verschiedenheit in der magnetischen Wirkung eines bewegten und eines ruhenden Körpers anzuzeigen. Meine Analyse umfasst beide Fälle zugleich und ich habe sie von jeder Voraussetzung über die Anordnung der zwei Flüssigkeiten in den magnetischen Elementen frei gemacht. Sie stützt sich auf ein einziges Princip, die Folgerungen, welche sich daraus ergeben, müssen mit der Erfahrung verglichen werden. Die allgemeinsten derselben folgen hier:

Wirkt eine gegebene Kraft auf Theile eines magnetischen Elementes mit gleicher Stärke; so lässt sich diese Wirkung auf einen gegebenen Punct ausdrücken, durch die Summe der drei componirenden Kräfte, multiplicirt durch die Functionen der Zeit, die im ersten Augenblicke gleich Null sind, aber nach Verlauf einer sehr kurzen Zeit beständige Werthe erlangt haben. Die Dauer dieser Zeit hängt von der Geschwindigkeit der zwei Fluida oder von dem Widerstande ab, den die Materie des Elements ihrer Bewegung entgegengesetzt. Man abstrahirt hierbei von der zusammenhaltenden Kraft, deren Wirkung längere Zeit sich äussert und die die Zersetzung des neutralen Flui-

dums gänzlich hindern konnte, so lang nicht eine äussere Kraft von gehöriger Intensität einwirkte.

Ich zeigte auch nach diesem Principe, dass im Falle, wo sich die Grösse und Richtung der gegebenen Kraft ändert, die Wirkung des Elementes nach Verlauf derselben Zeit durch das Product der componirenden Kräfte in dieselben Factoren ausgedrückt wird, als blieben jene Grössen unverändert und durch das ihrer Differentialquotienten auf die Zeit bezogen, in andere beständige Factoren. Diese Factoren wären gleich Null, wenn die Zerlegung des neutralen Fluidums augenblicklich erfolgte, wenn aber dieses nicht der Fall ist, so sind ihre Werthe von denen der anderen Factoren unabhängig und können grösser werden als diese, so dass die magnetische Wirkung einer sehr kleinen Anzahl von Elementen, die veränderlichen Kräfte unterworfen sind, die einer grossen Anzahl gleicher constanten Kräften unterworfener Elemente überwältiget. So kann, wie es auch die Erfahrung ausweiset, ein Körper, in welchem die magnetischen Elemente weit von einander abstehen und die unter dem Einfluss constanter Kräfte nur eine sehr geringe Wirkung ausübet, dess ungeachtet unter der Einwirkung veränderlicher Kräfte eine sehr starke ausüben und es kann umgekehrt geschehen, dass die im ersten Falle von einem Körper ausgeübte Wirkung im zweiten Falle um sehr wenig stärker erscheint. Die Constanten in Bezug auf beide Arten der Wirkung müssen unabhängig von einander für jeden einzelnen Körper und für jeden Wärmegrad besonders durch die Erfahrung gegeben werden. Nimmt man sie als gegeben an, so lautet das aufzulösende Problem allgemein ausgedrückt

so: Es ist die magnetische Wirkung zu bestimmen, die ein Körper von beliebiger Gestalt, er mag ruhen, oder sich bewegen, in jedem Augenblick auf ein System von Puncten, deren Lage gegeben ist, ausübt, wenn dieser Körper Kräften unterworfen ist, deren Componirende durch Functionen der Zeit ausgedrückt sind. Ich habe die Auflösung dieses Problems gegeben. Wendet man sie auf den Fall unveränderlicher Kräfte an, so erhält man die Formeln, die ich in meinem früheren Mémoire abgeleitet habe.

Diese allgemeinen Gleichungen löset man leicht für den Fall einer homogenen Kugel auf, die sich mit constanter Geschwindigkeit um ihre Axe dreht. Ist die Kraft, welcher sie ausgesetzt ist, von allen Puncten gleich, wie die Wirkung der Erde oder eines sehr weit entfernten Magnetes, so wird ihr Magnetismus so seyn, als wenn sie ruhte und man zur gegebenen Kraft noch eine andere ähnliche fügte, deren Richtung auf der Drehungsaxe senkrecht steht, und nahe normal ist zu der Ebene, die durch diese Linie geht, und mit der äusseren Kraft parallel lauft; ein Resultat welches einen allgemeinen aus Barlows Versuchen sich ergebenden Verhalten entspricht. Auch die Richtung der Ablenkung einer Magnetnadel zeigt die Theorie so, wie sie Barlow angibt, sie zieht nämlich der Nordpol an und stosst den Südpol ab, wenn sich ihr oberer Theil der Nadel nähert, und umgekehrt, wenn sich dieser Theil von ihr entfernt.

Ich habe die Formeln auf eine ruhende Kugel angewendet, deren Temperatur vom Centrum nach aussen wächst, und wovon alle Puncte gleichen und parallelen Kräften ausgesetzt sind. Ihr magnetischer Zustand und ihre Wirkung nach aussen hängt von ihrer

Abkühlungsgeschwindigkeit ab und fällt anders aus, als wenn jeder Punct eine beständige Temperatur hätte. Eine beständige Temperaturänderung oder jede andere continuirlich wirkende Ursache, welche die zwei magnetischen Fluida in einem Elemente nicht ins Gleichgewicht kommen lässt, muss wie die Bewegung einwirken. Allein dieser Punct ist noch nicht scharf genug erforscht.

Zwei eiserne durch die Erde magnetisirte Kugeln von einerlei äusserem Durchmesser, wovon aber eine hohl, die andere massiv ist, oder wovon beide hohl aber ungleich dick sind, üben in der Ruhe dieselbe magnetische Wirkung aus, vorausgesetzt dass die Dicke des massiven Theils kein gar kleiner Bruchtheil des Durchmessers ist, welcher Werth aber von der Natur des Eisens abhängt. Dieses hat Barlow durch Erfahrung bewiesen und ich habe es in meinem ersten Mémoire über den Magnetismus theoretisch dargethan. Die Theorie zeigt aber auch, und es wäre wichtig, dieses durch Versuche zu prüfen, dass solche 2 Kugeln, die sich mit gleicher Geschwindigkeit um ihre Axe drehen, nicht mehr auf gleiche Weise nach Aussen wirken, so dass dieselbe wechselweise ihrem Einflusse ausgesetzte Magnetnadel in derselben Lage, dieselbe Ablenkung erlitte, wenn sie ruhen, hingegen verschiedene, wenn sie sich bewegen. Diese Ablenkungen richten sich nach ihrer Dicke und nach ihrer Geschwindigkeit, befolgen aber sehr verwickelte Gesetze. Ich habe auch die Formeln entwickelt, welche die Wirkung einer rotirenden Platte auf eine Magnetnadel oder die einer ruhenden Platte auf eine bewegte Magnetnadel ausdrücken, allein sie sind nur auf den Fall

anwendbar, wenn die Ränder dieser Platte so weit von den Polen der Magnetnadel abstehen, dass ihr gegenseitiger Einfluss unmerklich ist. Die Wirkung der Ränder, besonders der Kanten führt auf zu schwierige Rechnungen und wird in einem folgenden Mémoire behandelt werden. Hier werden die drei Seitenkräfte betrachtet, die auf einen gegebenen Punct einer kreisrunden Scheibe wirken, die sich gleichförmig dreht und deren Durchmesser als unendlich gross angesehen wird. Eine dieser Kräfte ist mit der Oberfläche der Platte parallel und wirket im Kreise herum, die andere ist ebenfalls mit ihr parallel, folgt aber in ihrer Richtung den Radien, die vom Drehungsmittelpuncte ausgehen, die dritte steht auf der Oberfläche senkrecht. Die zwei letzteren sind durch Reihen ausgedrückt, die nach den geraden Potenzen der Umdrehungsgeschwindigkeit geordnet sind, von der zweiten angefangen; den Werth der ersten stellt eine Reihe vor, die nach den ungeraden Potenzen forschreitet. Ist die Platte horizontal, so entfernt die erste Kraft die Magnetnadel aus dem magnetischen Meridian und erhält sie entweder in einer bestimmten Richtung oder dreht sie unablässig herum, jenachdem die Geschwindigkeit der Platte beschaffen ist; die zwei ersten Glieder der Reihe, welche sie ausdrücken, reichen hin, die von Arago bei sehr grossen Geschwindigkeiten der Platte durch Erfahrung gefundenen Ablenkungen genau auszudrücken. Die beiden andern Seitenkräfte wirken auf den unteren Pol einer Neigungsnadel; ist sie nur etwas lang, so ist der Einfluss auf den anderen Pol unmerklich. Geht nun die Ebene, in der sie sich bewegen kann, durch den Umdrehungs-

mittelpunct der Platte, so wird die Nadel durch diese zwei Kräfte allein aus ihrer natürlichen Lage gebracht. Die verticale Wirkung der rotirenden Platte auf die beiden Pole der horizontalen Magnetnadel vermindert ihr Gewicht scheinbar um eine Grösse, wovon ich den analytischen Ausdruck gefunden habe. Die horizontale Kraft, die nach der Richtung des Halbmessers der Platte wirkt, oder vielmehr das erste Glied ihres Werthes, das den Hauptbestandtheil bildet, hat beständig dasselbe Zeichen, wenn man den Durchmesser der Platte als unendlich gross ansieht. In der Wirklichkeit ist dieses nicht mehr so, wenn sich die horizontale Projection des Punctes, worauf die Kraft wirkt, dem Rande der Platte nähert. Berücksichtiget man diesen Einfluss, so besteht der Ausdruck dieser Kraft aus Gliedern mit entgegengesetzten Zeichen, die in einer bestimmten Entfernung vom Centrum einander gleich sind, so dass zu beiden Seiten dieses Punctes, die Kraft eine entgegengesetzte Richtung hat. Ich habe für einen besondern Fall diese Distanz berechnet und einen Werth gefunden, der sich dem von Arago beobachteten stark nähert. Indess habe ich bei dieser Arbeit den Einfluss der Ränder nicht berücksichtiget und ich erwähne diesen Fall nur, damit man nicht glaube, die Theorie sey in Betreff dieser Aenderungen der Richtung der Kraft mangelhaft.

Ist die horizontale Platte unbeweglich, so vermindert ihre Wirkung die Schwingungsbogen der Abweichungs- und Neigungsnadel successiv, hat aber auf die Schwingungszeit einen viel geringeren Einfluss; wie es die Erfahrung ausweiset. Die Veränderungen der Schwingungsbogen zweier Magnetnadeln sind Grös-

sen derselben Ordnung und lassen sich von einander ableiten; Dieses ist bei der Bewegung nicht der Fall, denn da hängen die Ablenkungen von Grössen verschiedener Ordnung ab, die nicht mit einander in Verbindung stehen. Ist die einer gewissen Geschwindigkeit entsprechende horizontale Ablenkung gegeben, so kann man daraus unmittelbar nach einer meiner Formeln die Veränderung des Schwingungsbogen derselben Nadel in derselben Entfernung von der Platte ableiten, indem man nur voraussetzt, dass diese Entfernung gross genug ist, um diese Veränderung als einen kleinen Theil des ganzen Schwingungsbogens, der beliebig gross seyn kann, ansehen zu können.

Die Kräfte, welche die Platte magnetisiren, sie mag ruhig oder bewegt seyn, sind der Erdmagnetismus und die Wirkung der Pole der Magnetnadel, auf welche sie zurückwirkt; jedoch bei einer sehr grossen Platte, wie ich sie angenommen habe, kann der Einfluss der ersteren Kraft nur sehr gering seyn. Desshalb ist diese Reaction der Platte nahe dem Quadrate der Stärke der magnetischen Pole proportionirt. Ist also die Magnetnadel durch Nebeneinanderlagerung mehrerer ganz gleicher Magnetnadeln gebildet, die auf einander nicht merklich einwirken, so ist die Rückwirkung der Platte dem Quadrate ihrer Anzahl proportionirt, zugleich ist die Wirkung der Erde derselben Anzahl der Magnetnadeln proportionirt; daher ändert sich die Ablenkung nach diesem letztern Verhältnisse, wie es auch die Erfahrung zeigt. Bei der Ablenkung einer Magnetnadel durch eine Kugel oder einen andern ruhenden oder bewegten Körper, der durch die Erde magnetisirt ist, verhält sich die Sache an-

ders. Da bleibt sie stets dieselbe, wie auch die Stärke des Magnetismus beschaffen seyn mag, wenn man von der Reibung am Hüttchen, oder von der Torsion des Aufhängungsfadens absieht. Im Allgemeinen stimmen die Beobachtungen mit meiner Theorie überein, allein um letztere ausser allen Zweifel zu setzen, müsste man sie sehr scharf mit einander vergleichen, welches nicht schwer seyn dürfte, wenn man einmal die einem Körper und seiner Temperatur entsprechenden Constanten bestimmt hat. Eine dieser Constanten bezieht sich auf die Wirkung des Magnetismus in der Ruhe, ihr Werth ist im Eisen am grössten, kleiner im Nickel und Kobalt, in den übrigen Substanzen fast unmerklich. Die Anzahl der Constanten für den Magnetismus in der Bewegung ist unendlich gross, allein sie bilden eine sehr convergirende Reihe, wovon die ersten drei Glieder hinreichen.

Der mathematische Theil dieser Theorie im 6. Bande der Nouvelles Mémoires de l'Academie des Sciences, der unter der Presse ist, enthalten und wird den Lesern dieser Zeitschrift in einem der folgenden Hefte mitgetheilt werden.

IV. Neue und verbesserte physikalische Instrumente.

2.

Barclay's hydrostatischer Quadrant.

(Philos. mag. Octob. 1826.)

Ein Instrument, welches zu Höhenbestimmungen ohne Beihülfe eines künstlichen Horizontes dient, ist zwar vorzüglich zur See von unschätzbarem Werthe, aber es dürfte wohl auch den Beobachtern auf dem festen Lande nicht unwillkommen seyn. Von der Art ist der von Barclay erfundene hydrostatische Quadrant, dessen Einrichtung im Wesentlichen auf Folgendem beruht:

Es sey AEBD (Fig. 2) eine kreisförmig gebogene Röhre, die zum Theile mit einer Flüssigkeit angefüllt ist. Diese Flüssigkeit wird offenbar stets den unteren Theil der Röhre ADB annehmen, und die gerade Linie AFB, welche die Oberfläche derselben in beiden Armen zugleich berührt, wird immer horizontal seyn. Stellt nun DFE die Axe eines Fernrohres vor, welches in einer Ebene liegt, die mit der der Röhre parallel, und auf irgend einen Gegenstand hingerichtet ist, so wird, falls die Axe der Röhre in einer Verticalebene liegt, der Winkel EFB, dessen Mass die halbe Summe der Bogen AD und EB ist, die Höhe des Gegenstandes angeben. Jedoch ändert sich die Lage der Linie AB mit jeder Aenderung der Lage des Instrumentes, und es entsteht die Frage: wie lässt sich die Lage der Bogen AB und EB bestimmen, in dem Augenblicke, wo das

Fernrohr auf einen Gegenstand gerichtet ist? Barclay gibt ein sinnreiches Mittel an, die Antwort auf diese Frage zu erfahren. Er bringt in C einen Hahn an, der in dem Augenblicke gedreht wird, in welchem die Beobachtung gemacht ist. Dadurch bekommt die tropfbare Flüssigkeit und die Luft in der Röhre einen fixen Stand, und man kann die Bögen AD und EB von einem an der Röhre angebrachten getheilten Kreisbogen ablesen. Die Röhre, welche einen Bestandtheil dieses Instrumentes ausmacht, ist durch zwei gleiche kreisförmige Ringe von $\frac{3}{10}$ Z. Breite und 7 Z. inneren Durchmesser gebildet, die in zwei kreisrunde ebene Glasplatten eingeschliffen und darin gehörig luftdicht befestiget sind. Das Ganze ist in eine metallene Röhre eingefasst; auf jeder Seite des Ringes ist ein metallener Kreis angebracht, der sich um eine durch den Mittelpunct der Glasplatte gehende Axe drehen lässt. Der eine trägt das Fernrohr und lässt sich mit demselben mittelst eines Getriebes drehen. Doch braucht man dadurch dem Fernrohr nur beiläufig die nöthige Richtung zu geben. Der Kreis auf der anderen Seite des Ringes ist getheilt. Fig. 3. stellt das Instrument nach jener, Fig. 4 nach dieser Seite vor. AB (Fig. 3) ist das Fernrohr, welches in O und O′ an die Platte befestiget ist, die sich um G dreht mittelst des Getriebes P; zwischen ab und a′b′ ist das Metall weggenommen, um die Oberfläche der Flüssigkeit f und f′ sehen zu können; C ist der Sperrhahn, z ein Stift, gegen welchen die Lappen des Hahnkopfes stehen, wenn die Communication in der Röhre gesperrt ist.

QQ (Fig. 4) ist der auf der anderen Seite der

Röhre befindliche, eingetheilte Kreis, der mit dem vorigen fest verbunden ist, und sich mit ihm um G dreht; r, s, s′ sind drei Arme nach der Richtung dreier Halbmesser, die mit einander in Verbindung stehen, und um G gedreht werden können, unabhängig von Q. Alle drei lassen sich durch das Getriebe p, welches an r befestiget ist, drehen, s und s′ tragen zwei Microscope m, m′, in deren Gesichtsfeld ein feines Haar gespannt ist, welches dem Nullpuncte der Nonien v, v′ entspricht, die an denselben Armen fest gemacht sind.

Beim Gebrauche fasst man das Instrument beim Handgriffe ED, hält es möglichst vertical, und dreht das Getriebe P, (Fig. 3) bis das Fernrohr nahe auf den beabsichtigten Gegenstand gerichtet ist. Dann streckt man die Hand, welche P dreht, oder nur einen Finger derselben nach den Sperrhahn C aus, dreht das Instrument in einem verticalen Kreise so weit, bis das Object genau den horizontalen Faden des Fernrohres trifft, und schliesst in diesem Augenblicke den Hahn. Ist dieses geschehen, so hat man die Beobachtung auf der anderen Seite des Instrumentes abzulesen. Zu diesem Behufe macht man den Faden m des Microscopes zur Tangente von f, liest den Punct ab, den der Nonius angibt, und thut dasselbe auf der anderen Seite mit dem Faden m′ gegen f′. Dabei muss man das Instrument so halten, dass die krummen Flächen, mit denen die Flüssigkeit in beiden Armen begrenzt ist, einander gleich sind, welches man präcis genug durch Augenmass erkennt.

Allein da die beiden Arme weit von einander abstehen, und man die beiden krummen Flächen

nicht zugleich sehen kann, so thut man besser, wenn man das Instrument so hält, dass die Curve zu beiden Seiten der Axe symmetrisch ist, und dann den Micrometerfaden zur Tangente am Scheitel derselben macht.

Bei einem Instrumente dieser Art gaben Beobachtungen, welche Riddle anstellte, die an dem A zunächst stehenden Microscope abgelesen wurden, die Höhe aller Gegenstände zu klein an, die auf der anderen Seite abgelesenen aber zu gross. Der Fehler lag an der Centrirung, wie leicht zu errathen ist. Eine Reihe von Beobachtungen lehrte aber bald die mittlere Differenz solcher Höhen kennen, die man daher in der Folge zu jedem Resultate, das man an einer Seite abliest, addiren und zu der an der anderen beobachteten abziehen muss. Bei Riddle's Instrument betrug dieser Mittelwerth 3′ 56″. Riddle hat die mit diesem Instrumente erhaltenen Resultate mit denen verglichen, welcher ein Sextant gab. Der beobachtete Gegenstand war die Sonne. Bei 41 Beobachtungen betrug die kleinste Differenz 7″; 14 überstiegen nicht 30″; 8 waren zwischen 30″ und 1′; 5 zwischen 1′ und 1′ 30″; 3 zwischen 1′, 30″ und 2′, die übrigen zwischen 2′ und 3′ 17″ welcher letztere Werth die grösste Differenz anzeigt, die aber nur einmal Statt fand. Unter allen waren 20 positive und 21 negative Differenzen.

2.

Ottley's Knallgasgebläse.

(Mechanic's Magazine Nr. 157.)

Dieses einfache, ganz gefahrlose Instrument ist (Fig. 5) abgebildet. AB ist eine Blase, in welcher sich das Knallgas befindet, C ein Hahn, durch den man dem Gase den Ausgang verwehren kann, DE ein messingener Cylinder von ungefähr 1 Z. im Durchmesser. Er ist mit Eisenfeilspänen angefüllt, hat zwei Hälse, die mit Dünntuche zugebunden sind, damit die Feilspäne nicht herausfallen, und wovon sich einer an die Röhre des Hahnes C, der andere an den Schnabel F des Gebläses anschrauben lässt. Drückt man auf die Blase, nachdem man den Hahn geöffnet hat, so dringt die Luft durch die Eisenfeilspäne, und kann an der Mündung des Rohres angezündet werden. Ein Zurückbrennen kann nicht Statt finden, weil die Eisenfeilspäne das durchziehende Gas so abkühlen, dass es in denselben augenblicklich verlischt. Ottley arbeitet mit diesem Gebläse selbst, wenn die Röhre E 5 — 7 Oeffnungen hat.

V. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

Fortsetzung der Optik.

Polarisation und polarisirende Wirkung einiger Körper.

Die Untersuchung der Einwirkung krystallisirter Körper auf das Licht beschäftiget die Physiker noch fortwährend, und gewährte manche interessante neue Thatsache.

Bekanntlich hat Biot die Physiker auf die verschiedener Eigenschaften der Mineralkörper, die mit dem Namen Glimmer bezeichnet werden, zuerst aufmerksam gemacht und aus dieser Verschiedenheit auf eine Abweichung in ihrer innern chemischen Natur geschlossen. An den meisten Glimmerarten findet man zwei Axen der doppelten Brechung. Marx *) untersuchte ein Stück eines Glimmers aus Monroe in New-York, das in Form einer verschobenen vierseitigen Säule mit ebenen Winkeln von 60° und 120° krystallisirt war, eine graulich grüne Farbe und an der Hauptspaltungsebene einen starken Spiegelglanz hatte. Nur die dünnsten Blätter waren durchsichtig, bei Stücken von der Dicke eines Blattes Velinpapier war die Durchsichtigkeit schon verloren. Dieser Glimmer hatte offenbar nur eine Axe der doppelten Brechung; denn einzelne

*) Poggendorffs Annalen. 1826 St. 10.

Plättchen stellten im polarisirten Licht, während ihrer Umdrehung das verschwundene ungewöhnlich gebrochene Bild eines Doppelspathprisma's nicht wieder her, so lange der polarisirte Lichtstrahl senkrecht durch sie ging; wurden sie aber gegen den Strahl geneigt, so erschien dieses bald wieder und zwar farbig. Zwischen zwei Turmalinplättchen gelegt, sah man sie mit concentrischen Farbenringen, die von einem schwarzen Kreuze durchschnitten waren. Ueberhaupt fand Marx die meisten dunkelgrünen und schwarzen Glimmer einaxig.

Marx untersuchte das optische Verhalten des klaren böhmischen Arragonites, an dem sich deutliche Kennzeichen einer Zwillingsbildung zeigten und fand die Blätter dieser Krystalle, welche senkrecht auf die Axe des Prisma's geschnitten waren, mit den Eigenschaften begabt, welche der Zwillingsbildung entsprachen. Wenn er nämlich an einem solchen Plättchen im polarisirten Lichte die bekannten Farbenringe erblickte, brauchte er dasselbe nur ein wenig zu neigen oder zu drehen, um ein anderes Ringsystem zu bemerken. Jedes einzelne Ringsystem bestand wieder aus zwei Theilen, zum Beweise, dass ein Zwillingskrystall wirklich vier optische Axen besitze, wovon je zwei zu einem Krystalle gehören. Bei einer günstigen Lage bemerkte Marx alle den vier Axen entsprechende Ringe mit schwarzen hyperbolischen Armen durchschnitten.

Versuche, wie die hier angeführten machte man bis jetzt am bequemsten mit Turmalinplättchen, indem man den zu prüfenden Krystall zwischen zwei derselben auf die bekannte Weise legte. Zu diesem besondern Gebrauch sind sie durch ein eigenes optisches Verhal-

ten geeignet, nämlich das Licht parallel mit der Axe vollkommen zu polarisiren. Marx *) bemerkte dieselbe Eigenschaft auch am Dichroit (prismatischem Quarz) und zwar soll dieses Mineral dieselbe nicht bloss parallel mit der Axe, sondern auch senkrecht darauf besitzen. Wenn man daher statt des Turmalins Dichroit zum Behufe optischer Untersuchungen anwenden will, so kann man, statt der senkrecht auf die Axe geschnittenen Blätter auch solche anwenden, die parallel damit geschnitten sind.

Brewster **) untersuchte die Wirkung des von Haidinger entdekten und von Eduard Turner analysirten Minerals des Edingtonits, und fand, dass es eine Axe der doppelten Brechung besitze, die mit der Axe des Octaeders, seiner Grundgestalt, zusammenfällt. Uebrigens ist seine Wirkung abstossend, oder nach Brewster, negativ, wie die des Doppelspathes.

Ein junger Chemiker, Namens Heeren, machte die Darstellung der unterschwefelsauren Verbindungen zum Gegenstande einer besonderen Aufmerksamkeit, und gelangte durch besondere Mittel dahin, ausgezeichnet schön krystallisirte Stücke zu erhalten. Marx ***) benützte diese Gelegenheit, das optische Verhalten dieser Salzkrystalle zu untersuchen und gelangte dabei zu folgenden Resultaten:

Dünne Spaltungsblätter von zolllangen, wasserklaren Krystallen aus unterschwefelsaurem Natrum, die als vierseitige, fast quadratische Prismen erschie-

---

*) a. a. O.

**) Edinb. journ. of Science. N. VIII.

***) Schweiggers Journal 1826. H. 6.

nen, mit Blätterdurchgängen, die den vier Seiten des Prisma's parallel sind, zeigten im polarisirten Lichte lebhafte, beinahe kreisrunde Farbenringe, durch deren Mitte sich ein immer breiter werdender Streifen hinzieht, der im Allgemeinen zwar schwarz ist, aber an einer Seite eine rothe, an der anderen eine bläulichgrüne Einfassung hat. Diese beiden Farben sind in diesen Streifen so deutlich ausgesprochen, dass dickere Blätter oder ein ganzer Krystall nur einen rothen oder blauen Fleck zeigen, wenn man durch sie hindurchsieht. Diese Erscheinung rührt nach Herschel davon her, dass die Axen der doppelten Brechung für die verschiedenfarbigen Strahlen im Krystalle auch verschiedene Lagen haben. Die optischen Erscheinungen sind nach beiden Blätterdurchgängen dieselben. Es müssen daher die resultirenden Axen dieselbe Neigung haben, wie die Seitenflächen des Prisma's, welche auf 89° 20′ bestimmt wurde.

Die in der Luft beständigen Krystalle aus unterschwefelsaurem Baryt boten viele Flächen dar, und waren wegen ihrer eigenthümlichen Combinationen und Verwachsungen schwer zu prüfen. Einige Blätter, die etwa ⅓ L. dick waren, zeigten im polarisirten Lichte unzählige Ringe mit einem röthlichen und bläulichen Punct in der Mitte. Blätter so dick wie Schreibpapier zeigten Ellipsen, in denen die dunkel violette Farbe vorherrschte, und die von einem schwarzen allmählig breiter werdenden Striche durchschnitten wurden, der eine rothgelbe und bläuliche Einfassung hatte, zum Beweise, dass auch hier die Brechungsaxe für jeden farbigen Strahl eine andere Lage habe. Diese Ringe erschienen am Deutlichsten, wenn

die Blättchen um etwa 5° gegen die natürlichen Seitenflächen geneigt waren. Das andere Ringsystem liess sich nicht darstellen, wahrscheinlich weil die zweite Axe einen grossen Winkel mit der ersten macht und die Ebene der Axen nicht auf der des Gefüges senkrecht steht.

Unterschwefelsaurer Kalk krystallisirt in grossen hellen Krystallen, welche als regelmässige sechsseitige Tafeln mit zugeschärften Kanten erscheinen. Sie zeigten im polarisirten Lichte vollkommen kreisförmige Ringe mit einem schwarzen Kreuze, haben also eine Axe der doppelten Brechung und zwar eine attractiv wirkende.

Unterschwefelsaures Blei erscheint in rhomboedrischen Formen und zeigt im polarisirten Lichte schöne kreisförmige Ringe mit einem Kreuze.

Bekanntlich krystallisirt Zucker in Form sechsseitiger Prismen, die zuweilen oben und unten mit 2 Flächen zugeschärft sind. Es liess sich aus dieser Gestalt vermuthen, dass er das durchgelassene Licht polarisirt und Biot hat dieses durch die Erfahrung bewiesen, indem er die Zuckerkrystalle parallel mit den zwei breiten Flächen des Prisma's abschliff, und durch die so entstandenen Plättchen einen polarisirten Strahl leitete, in welchem Fall man die polarisirten Farbenringe sehen konnte. Marx *) zeigte aber, dass der Zucker gerade nach dieser Richtung fast so leicht theilbar ist, wie Gips oder Glimmer, und dass man durch einen Schlag auf ein zweckmässig eingesetzes Messer seinen Zweck viel leichter erreicht, als

*) Kastners Archiv. 1826 St. 8.

es Biot durch das Schleifen und Poliren im Stande war.

Derselbe Gelehrte*) hat auch ein Mittel angegeben, die thierischen Knochen in einzelne Lamellen aufzulösen, so dass sie zu optischen Untersuchungen taugen. Er liess einen Schenkelknochen von einem Ochsen mehrere Monate in verdünnter Salzsäure liegen. Als er hierauf die biegsam und durchscheinend gewordene Gallerte untersuchte, fand er sie von völlig blätteriger Structur so, das man rings um den Knochen beliebig dicke Blätter wie vom Glimmer ablösen konnte, die auch im polarisirten Lichte ähnliche Farbenerscheinungen geben, wie Glimmer; besonders erscheinen diese deutlich an noch feuchten Plättchen, noch schöner aber, wenn diese erst getrocknet und dann mit Quassiaöhl getränkt werden.

Optische Instrumente.

Die Schwierigkeit, wellenfreies Flintglass von grossem Farbenzerstreuungsvermögen zu bereiten, hat von jeher der Verfertigung achromatischer Fernröhre überhaupt, besonders der mit grossen Oeffnungen fast unüberwindliche Hindernisse in den Weg gesetzt. Wie wenig man selbst in England, dem ersten Vaterlande achromatischer Instrumente, hoffte, es dahin zu bringen, grosse brauchbare Stücke Flintglas zu Stande zu bringen, beweiset eine Aufforderung des berühmten Dr. Brewster**) die von Blain schon im Jahre 1789 bekanntgemachten Fernröhre näher zu prüfen.

*) Kastners Archiv a. a. O.
**) Edinb. Journal of Science N. 8.

bei denen das Flintglas durch eine transparente Flüssigkeit ersetzt war. Brewster führt das Urtheil Robinsons über ein solches Instrument an, das allerdings sehr zum Vortheile desselben spricht. Er sagt, ein solches Fernrohr von 15 Zoll Länge kam in jedem Betracht einem von Dollond, das eine Länge von 42 Zoll hatte, gleich, oder übertraf es gar. Die Brennweite des Objectives hatte 12 Z., die Oeffnung desselben betrug 2 Zoll. Es hatte 2 Oculare, mit deren einem es 75mal, mit dem anderen hingegen 95mal vergrösserte. Ein solches Fernrohr, das 140mal vergrösserte, zeigte die Doppelsterne sehr deutlich, und überhaupt erschienen durch solche Instrumente die Fixsterne mit wohl begrenzten Scheibchen, oft wohl von Ringen umgeben, die durch Beugung des Lichtes entstanden, aber doch ohne Irradiation. Uebrigens darf man bei der Beurtheilung solcher Fernröhre mit Objectiven, wo eine Flüssigkeit das Flintglas ersetzt, das nicht vergessen, was der unsterbliche Fraunhofer über solche Objective sagte, nämlich dass das Verhältniss der Zerstreuung verschiedener Farben bei jedem Wechsel der Temperatur eine Aenderung erleidet, und dass wegen der leichten Verschiebbarkeit der flüssigen Theile stets die oberen Theile wärmer seyn und mithin auch auf andere Weise auf das Licht einwirken werden. Darum wird es wohl immer gerathener bleiben, an der Vervollkommnung der Flintglasfabrikation zu arbeiten, als über Flüssigkeiten zu sinnen, welche das Flintglas vertreten sollen.

Bis jetzt haben es Guinand und Fraunhofer in der Verfertigung des wellenfreien Flintglases am weitesten gebracht; doch liefert in Deutschland auch

Körner *) in Jena von ihm selbst verfertigtes Flintglas. Das von Fraunhofer verfertigte hat den grossen Vorzug eines Farbenzerstreuungsvermögens, das sich zu dem des Crownglases wie 4 : 2 verhält, während dieses Verhältniss bei dem bisher aus England zu uns gekommenen nur 3 : 2 betrug. Dieser Umstand begründete mitunter auch die Möglichkeit besonders grosse achromatische Fernröhre zu verfertigen, wie denn wirklich der von Fraunhofer für die Sternwarte in Dorpat verfertigte Refractor das grösste dioptrische Instrument in der Welt ist. Sein Objectiv hat 108 p. L. Oeffnung und 160 Z. Brennweite. Es sind aber auch die von Guinand verfertigten Flintgläser von vorzüglicher Güte, wie die bewährten Kenner G. Dollond, J. Herschel und W. Pearson **) bezeugen, die im Namen der astronomischen Societät zu London ein von Tulley aus Guinand'schem Flintglase eigens verfertigtes Fernrohr prüften. Guinand übergab nämlich eine Scheibe Flintglas von $7\frac{1}{4}$ engl. Z. der astronomischen Societät zur Disposition. Diese wurde den Herren Dollond und Tulley übergeben, deren letzterer es übernahm, daraus eine Concavlinse zu einem achromatischen Objectiv von 12 F. Brennweite zu verfertigen. Allein der Künstler hatte viele Noth, um ein ganz gleichartiges Stück Crownglas zu finden. Eine Scheibe französischen Crownglases wurde vergebens zu einer Convexlinse geformt, um mit jener Concavlinse eine achromatische Combination zu geben; denn als die Arbeit vollen-

---

*) Poggendorfs Annalen B. 7.

**) Annals of philosophy 1826 Juni.

det war, fand man das Instrument nichts weniger, als so vorzüglich, wie man hoffte. Der Künstler ward aber dadurch nicht entmuthiget, er nahm eine andere Scheibe von englischem Crownglase, bildete sie zu einer Convexlinse und änderte selbst die Flintglaslinse um, weil dieses Crownglas eine geringere Brechungskraft besass, als die erstere. So brachte er ein Instrument zu Stande, dessen Objectivglas eine Oeffnung von 6.8 Z. hatte, und sich bei allen Proben, die man damit vornahm, als vortrefflich bewies. Man sah damit auf die Planeten Jupiter und Saturn, auf schwer zu erkennende Doppelsterne im Sternbilde des Löwen und Krebses und auf den Nebelfleck in der Jungfrau. Ein lichtes Object auf dunklem Grund ist für ein stark vergrösserndes Fernrohr stets der schärfste Prüfstein, weil es leicht mit gefärbten Rändern erscheint, wenn das Instrument etwas fehlerhaft ist. Allein das Tulley'sche Fernrohr zeigte alle solche Bilder ohne Farbensaum und scharf begrenzt zum Beweise, dass es gut gebaut und das Flintglas von vorzüglicher Güte sey. Es war frei von aller Irradiation und hatte eine so grosse Lichtstärke, dass man damit Herschels Nebelsterne der fünften Classe sehen konnte. Auch die Abtheilung des Saturnringes und die drei innerhalb desselben befindlichen Trabanten sah man deutlich, und man konnte den Schatten eines Jupitertrabanten bemerken.

Ein anderes sehr gepriesenes dioptrisches Instrument ist dasjenige, welches Lerebours für die k. Sternwarte zu Paris verfertigte, das ein Objectivglas von 11 F. Brennweite und eine Oeffnung von 9.2 Z. hat, von der aber nur 8.4 Z. wirksam sind. Die Ver-

grösserungen, die dieses Instrument hervorbringt, sind 136, 153, 224, 240, 420 und 560. South *) sah mit diesem Instrumente Venus, Jupiter und Saturn sehr gut begrenzt, auch mehrere Fixsterne vollkommen rund. Indess behauptet er doch noch, dass dioptrische Fernröhre von solcher Vollkommenheit von catoptrischen übertroffen werden, und gründet sein Urtheil vorzüglich auf eine Vergleichung des Pariser Refractor's mit einem Reflector zu Slough von 20 F. und darauf, dass er mit einem Gregorian'schen Reflector von 6 Z. Oeffnung 30 Z. Brennweite, den Watson im Jahre 1809 verfertigt hatte, im Jahre 1810 den Stern ζ in Bootes als Doppelstern erkannte, den schon frühern Fond zu Lissabon mittelst eines Newtonischen Fernrohres von 6 Z. Oeffnung als solchen sah.

Fraunhofer meinte den Refractoren von dem Reflectoren desshalb einen Vorzug einräumen zu müssen, weil der vollkommenste Metallspiegel das meiste auffallende Licht reflectirt und daher im reflectirenden Instrumente die Lichtstärke immer nur gering seyn kann. Allein Herschel behauptet, dass ein Metallspiegel 0. 673 des auffallenden Lichtes reflectirt, mithin weniger als ⅓ desselben absorbirt.

Darum, sagt Herschel, ward auch jedes Auge geblendet, dass in seines Vaters zwanzigfüssigen Reflector den Sirius und α in der Leyer eintreten sah, ja selbst mit einem gewöhnlichen Reflector nach Newtons Construction der 6 Z. Oeffnung hatte und daher bei übrigens gleichen Umständen einem achro-

---

*) The Edinb. journ. of Sciences. N. 8.

metischen Instrumente von 3.99 p. Z. Oeffnung gleich kommt, erkannte sein Vater mit einer 460 maligen Vergrösserung ω im Löwen als Doppelstern. Als ferneren Grund für die Superiorität achromatischer Instrumente führt Fraunhofer den Umstand an, dass Bessel mit seinem Riesenrefractor einige Sterne als Doppelsterne erkannte, die Herschel, der Vater, nicht als solche aufführte, mithin sie mit seinem Instrumente nicht gesehen zu haben scheint; allein Herschel, der Sohn, zeigte auch hier, dass dieses auf einem Irrthum beruhe, und dass sein Vater diese Sterne wirklich als Doppelsterne sah. Bei allen diesem muss aber bemerkt werden, dass weder Herschel noch South Fraunhofers grossen Refractor gesehen hat. Letzterer gründet sein Urtheil bloss auf einen Vergleich zwischen dem Pariser Refractor und den früher genannten Reflectoren und bringt bei Fraunhofers Instrument nur die grössere Oeffnung in Anschlag. Allein Fraunhofers achromatische Fernröhre haben nicht der grösseren Oeffnung wegen einen so entschiedenen Vorzug vor denen anderer Künstler. Seine Objective sind anders berechnet, er hat die Dicke der Gläser und die höheren Potenzen der Oeffnungen etc. in die Formeln aufgenommen, die doch sonst vernachlässiget wurden, die Abweichung der Strahlen, die von Puncten ausser der Axe kommen, auf ein Minimum gebracht, das Farbenzerstreuungsvermögen nach seiner eigenen unübertrefflichen Methode bestimmt, den Gläsern eine mathematisch genaue sphärische Gestalt gegeben und sie auf das schärfste centirt und bei ihrer Befestigung gesorgt, dass sie weder die Gestalt noch die Lage auf eine unvortheilhafte Weise ändern können.

Desshalb ist auch bei seinen Instrumenten stets das Objectiv der ganzen Oeffnung nach wirksam, welches weder bei den englischen noch bei den französischen der Fall ist.

Eine Vergleichung catoptischer Instrumente mit dioptrischen, ist aber immer interessant, wenn man dabei auch nicht die allerbesten Instrumente zu Grunde legt, wenn sie nur auf bestimmten Beobachtungen beruht. Solche Beobachtungen wurden von Amici *) und W. Herschel angestellt.

Amici nahm ein Newton'sches Fernrohr, das er selbst verfertiget hatte, dessen Brennweite 30 Z. und dessen Oeffnung 36 L. betrug, und verglich es mit einem achromatischen Fernrohre von derselben Länge. Das Objectivglas bestand aus 2 Linsen und hatte 2½ Z. Oeffnung. Er brachte an diese Instrumente zwei gleiche Oculare an, und richtete sie nach demselben Gegenstande. Das achromatische Instrument zeigte ihm mit grösserer Klarheit. Es handelte sich nun darum, beide auf denselben Grad der Klarheit zu bringen. Amici construirte zu diesem Zwecke ein 3 Z. langes gläsernes Parallelopiped, das aus zwei dreiseitigen in entgegengesetzten Richtungen über einander gelegten Prismen bestand, deren eines aus farbenlosem Glase gemacht war, während das andere aus einer dunklen Glasmasse bestand, wie man sie zu Sonnengläsern anwendet. Durch dieses Parallelopiped konnte man die Lichtstärke an einem Fernrohre auf jeden beliebigen Grad herabsetzen, je nachdem man

---

*) Edinb. journ. A. a. O.

einen dickeren Theil des dunklen Prisma's vor das Objectivglas schob. Amici vermindert nun, um jede Rechnung zu vermeiden, die Oeffnung des heller zeigenden Instrumentes so lange, bis das an beiden Instrumenten auf solche Weise angebrachte Parallelepiped alles Licht auffing, und das Gesichtsfeld völlig dunkel erschien. Durch wiederholte Versuche fand er, dass man, um eine gleiche Lichtstärke zu erhalten, dem achromatischen Fernrohre eine Oeffnung von 27 L. geben musste, während das reflectirende eine Oeffnung von 36 L. hatte. Amici meint, das Verhältniss 3 : 4, dass sich aus diesen Versuchen ergab, gelte für Fernröhre von allen Dimensionen.

W. Herschels Untersuchungen geben beinahe dasselbe Resultat. Er fand nach Bouguer's Methode, dass sich bei einerlei Lichtstärke uud Vergrösserung die Oeffnung eines achromatischen Fernrohres mit doppeltem Objectiv zu der eines catoptrischen verhalten müsse, wie 7 : 10. Liess man aber beim Reflector den kleinen Spiegel weg, so war dieses Verhältniss 5 : 6. Demnach müsste ein achromatisches Fernrohr von derselben Lichtstärke und Vergrösserung wie Herschels 40füssiges Telescop eine Oeffnung von 40 engl. Z. haben.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Beiträge zur Lehre von der Entwicklung der Funktionen, von Dr. Joseph Knar, Prof. d. Math. an dem k. k. Lyceum zu Grätz.

(Schluss.)

14.

Dass die in 13. aufgezählten Gesetze bei den drei ersten Differentialquotienten wirklich gelten, zeigt die Vergleichung mit §. 12. Man wird aber nicht unbemerkt lassen, dass durch jene Gesetze, wenn ihre allgemeine Gültigkeit erwiesen seyn wird, die Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$ vollkommen bestimmt sind, so dass die Ersteren hinreichen müssen, um daraus die Letzteren sammt ihren Zeichen und Coefficienten zu finden. Man kann zwar, ausser den in §. 13 angeführten leicht noch andere Relationen bei den einzelnen Gliedern in §. 12 wahrnehmen, z. B. bei einem Gliede 81) von $\frac{d^nP}{dz^n}$ darf der subtractive Exponent von p, nicht grösser seyn, als $2n-1$, oder die Summe der Differentialexponenten eines Factors, wie $k+l$, oder $a+\alpha$, darf nicht grösser seyn, als n: allein diese Sätze müssen als blosse Folgerungen aus §. 13 betrach-

tet werden, und lassen sich auch wirklich leicht daraus herleiten, wenn es nöthig wäre.

15.

Um den Beweis über die allgemeine Gültigkeit der Gesetze in 13. herzustellen, kommt es auf folgende vier Puncte an:

1) Muss erwiesen werden, dass in $\frac{d^nP}{dz^n}$ keine andern Glieder, als nur von der Form (81), und welche den Bedingungen (82), (83), (84), entsprechen, vorkommen können.

2) Muss man das Gesetz 13. (6) über die Vorzeichen der Glieder beweisen.

3) Ist der hypothetische Satz zu beweisen, dass in $\frac{d^nP}{dz^n}$ alle Glieder, welche der Form (81) entsprechen, und den Bedingungen (82), (83), (84) Genüge leisten, mit den nach (85) zugehörigen Coefficienten vorkommen müssten, wenn in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ alle solchen Glieder enthalten wären.

4) Endlich ist noch zu zeigen, dass die Weglassung aller Glieder in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$, welche dem Gesetze 13. (4) nicht entsprechen, nur die Wirkung habe, dass solche Glieder auch in $\frac{d^nP}{dz^n}$ nicht vorkommen können, ohne dass jedoch dadurch die Gesetze in 13. gestört werden.

16.

Um bei den folgenden Beweisen leichter und sicherer zu Werke gehen zu können, ist es vor Allem nothwendig, die Art genauer zu untersuchen, wie die Glieder von $\frac{d^n P}{dz^n}$ aus den Gliedern von $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ entstehen, unter der Voraussetzung, dass die Letztern von der Form (81) seyen. Nach der allgemeinen Formel (78) muss man, um $\frac{d^n P}{dz^n}$ zu erhalten, zuerst alle Glieder von $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ ausschliesslich für z differentiiren; hernach müssen jene Glieder auch ausschliesslich für x differentiirt werden, wobei diese letzteren Differentialquotienten noch mit $-\, p_1^{-1} \cdot {}^1p$ zu multipliciren sind. Der Differentialquotient eines Gliedes, wie (81), aber wird, weil dasselbe ein Product ist, erhalten, indem man nach und nach jeden einzelnen Factor differentirt, wobei die übrigen Factoren jedes Mal ungeändert bleiben. Um daher den Differentialquotienten des Gliedes (81) ausschliesslich für z zu erhalten, hat man

(86) $\quad {}^1(p_1^{-m}) = -\, m \cdot p_1^{-(m+1)} \cdot {}^1p_1,$

und

(87) $\quad {}^1({}^l p_k) = {}^{l+1} p_k,$

$\quad {}^1({}^1 p^a) = a \cdot {}^1p^{a-1} \cdot {}^2p,$

$\quad {}^1({}^1 p_1^b) = b \cdot {}^1p_1^{b-1} \cdot {}^2p_1$

. . . .

. . . .

$$ {}^{1}\left({}^{\alpha}p_a^q\right) = q\,{}^{\alpha}p_a^{q-1} \cdot {}^{\alpha+1}p_a, \text{ u. s. f.} $$

Sucht man auf die nähmliche Art die Differentialquotienten von p_1^{-m} und den andern Factoren ausschliesslich für x und multiplicirt man dieselben sogleich mit $-p_1^{-1} \cdot {}^1p$; so ergibt sich:

$$ (88) \quad -\left(p_1^{-m}\right)_1 \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p = p_1^{-(m+2)} \cdot {}^1p \cdot p_2, $$

und

$$ (89) \quad -\left({}^1p_k\right)_1 \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p = -{}^1p_{k+1}\,p_1^{-1} \cdot {}^1p, $$

$$ -\left({}^1p^a\right)_1 \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p = -a \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p^a \cdot {}^1p_1, $$

$$ -\left({}^1p_1^b\right)_1 \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p = -b \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p \cdot {}^1p_1^{b-1} \cdot {}^1p_2 $$

. . . .

. . . .

$$ -\left({}^{\alpha}p_a^q\right)_1 \cdot p_1^{-1} \cdot {}^1p = -q \cdot {}^{-1}\,{}^1 \cdot p \cdot {}^{\alpha}p_a^{q-1} \cdot {}^{\alpha}p_{a+1} $$

u. s. f.

Denkt man zu diesen gefundenen Differentialquotienten (86) bis (89) noch die übrigen, bei jeder Differentirung unverändert gebliebenen, Factoren des Gliedes (81) hinzu gesetzt; so erhält man die Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$, welche aus (81) entspringen, wenn dasselbe ein Glied in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ ist.

Man bemerke hierbei zuerst, dass alle diese Glieder von der in 13. (2) beschriebenen Form sind, und dass ausser denselben aus einem Gliede (81) in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ keine anderen Glieder für $\frac{d^nP}{dz^n}$ nach der all-

gemeinen Formel (78) entstehen können. Ferner sieht man bei genauerer Betrachtung:

1. Dass in den Gliedern, welche aus den Differentialquotienten (87) hervorgehen, der subtractive Exponent von p_1 sowohl, als auch das Vorzeichen, die Anzahl der Factoren, und die Summe der Differentialexponenten aller Factoren für x unverändert bleibt, wie in dem Gliede (81); hingegen die Summe der Differentialexponenten für z um 1 grösser ist.

2. In den aus (86) und 89) entspringenden Glieder ist der subtractive Exponent von p_1 um 1 grösser, das Vorzeichen in das Entgegengesetzte abgeändert, ferner die Anzahl der Factoren und die Summe der Differenzialexponenten sowohl für x, als auch für z um 1 grösser, als in (81.) Endlich

3. in dem Gliede (88) ist der subtractive Exponent von p_1 um 2 vergrössert, das Vorzeichen unverändert, die Anzahl der Factoren und die Summe der Differentialexponenten für x um 2, hingegen die Summe der Differentialexponenten für z um 1 grösser, wie in (81).

17.

Aus dem Angeführten ist es leicht, zu erweisen, dass alle Glieder von $\frac{d^n P}{dz^n}$ die Form (81) haben müssen. Denn nach 16. können aus einem Gliede in $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ von jener Form nur eben solche Glieder für $\frac{d^n P}{dz^n}$ entspringen; sobald daher alle Glieder von

$\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ wirklich die Form (81) haben, müssen auch

alle Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$ von der nähmlichen Form seyn.

Nun haben die Glieder der drei ersten Differential-quotienten in 12. jene Form, dieselbe muss also auch den Gliedern aller folgenden Differentialquotienten von P zukommen.

Eben so leicht lässt sich auch zeigen, dass bei

den Gliedern von $\frac{d^nP}{dz^n}$ die Gleichungen (82) (83) (84)

Statt finden müssen. Setzen wir nähmlich voraus, dass

diese Gleichungen bei allen Gliedern von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$

bereits gelten. Nun folgt aus 16., dass in den aus irgend einem Gliede (81) entspringenden Gliedern die Anzahl der Factoren, ${}^1p$, ${}^1p_1$, ${}^2p$, p_2, ... unverändert bleibt, wenn auch der subtractive Exponent von p_1 derselbe ist, wie in (81), hingegen wird jene Anzahl der Factoren um 1 oder um 2 grösser, wenn zugleich der subtractive Exponent von p_1 um 1 oder um 2 grösser wird, als vorhin. Sobald daher in dem Gliede (81) die Anzahl jener Factoren dem subtractiven Exponenten von p_1 gleich ist, muss diess auch in allen daraus entspringenden Gliedern der Fall seyn, d. h., die Glei-

chung (82) muss für alle Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$ gelten, so-

bald sie in allen Gliedern von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ Statt findet.

Dasselbe gilt von der Gleichung (83), weil nach 16. auch die Summe der Differentialexponenten für x entweder unverändert bleibt, oder um 1 oder auch um 2 grösser wird, je nachdem der subtractive Exponent von p_1 unverändert bleibt, oder um 1 oder auch um 2 grösser wird.

Was die Summe der Differentialexponenten für z anbelangt, so sieht man aus 16., dass in allen aus einem Gliede (81) von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ entspringenden Gliedern von $\frac{d^nP}{dz^n}$ jene Summe um 1 grösser ist, als in (81), der Gleichung (84) ganz entsprechend, welche daher ebenfalls für die Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$ gelten wird, sobald sie bei allen Gliedern von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ gilt.

Man sieht, dass die Gleichungen (82) (83) (84) bei den Gliedern von $\frac{d^nP}{dz^n}$ Statt finden müssen, sobald sie bei den Gliedern von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ gelten: nun gelten sie, weil die Vergleichung mit 12. zeigt, bei den drei ersten Differentialexponenten von P wirklich, sie

müssen daher auch bei den Gliedern aller folgenden Differentialexponenten gültig seyn.

18.

Es unterliegt nunmehr auch keiner Schwierigkeit, das Gesetz 13. (6) zu erweisen. Denn, da vermöge 17. alle Glieder in den Differentialquotienten von P die in 16. vorausgesetzte Form (81) haben müssen, so werden die Vorzeichen der Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$ aus den Zeichen der Glieder von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ nach 16. bestimmt. Dort haben wir aber gesehen, dass das Vorzeichen eines Gliedes in $\frac{d^nP}{dz^n}$ von dem Zeichen des Gliedes in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$, aus welchem jenes entstand, nur dann verschieden sey, wenn im ersteren Gliede der subtractive Exponent von p^1 um 1 grösser ist, als im letzteren; sobald hingegen dieser Exponent entweder unverändert bleibt, oder um 2 grösser wird, bleibt das Vorzeichen unverändert. Setzt man nun, dass in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ alle Glieder mit geraden Exponenten von p^1 das Vorzeichen $+$, die Glieder mit ungeraden Exponenten aber das Zeichen $-$ haben; so folgt:

1) Dass die Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$, welche aus den Gliedern mit geraden Exponenten von p_1 entspringen,

und entweder denselben oder einen um 2 grösseren mithin ebenfalls geraden, Exponenten von p_1 haben, das Vorzeichen $+$ unverändert behalten; die Glieder aber, deren Exponent von p_1 um 1 grösser, mithin ungerade wird, haben das entgegen gesetzte Zeichen. —

2) Die Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$, hingegen, welche aus den Gliedern von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ mit ungeraden Exponenten von p_1 entstehen, und entweder eben denselben, oder einen um 2 grösseren mithin ebenfalls ungeraden Exponenten erhalten, werden das vorige Zeichen $-$ haben, während die Glieder, in welchen der Exponent von p_1 um 1 grösser, mithin gerade, ist, das entgegen gesetzte Zeichen $+$ erhalten werden. Man sieht hieraus, dass die Glieder von $\frac{d^nP}{dz^n}$ das Vorzeichen $+$ oder $-$ erhalten werden, je nachdem der subtractive Exponent von p_1 gerade ist, oder ungerade, sobald diess bei den Gliedern von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ der Fall ist: nun trifft diess bei den drei ersten Differentialquotienten in 12 wirklich ein, es muss daher diese Regel allgemein gültig seyn.

19.

Nachdem jetzt die beiden ersten in 15. angeführten Puncte bereits erwiesen seyn, kommen wir in dem weiteren Gange des Beweises auf den bedingten Satz,

dass in $\frac{d^n P}{dz^n}$ alle Glieder, welche der Form 81), und den Bedingungen 82), 83), 84) entsprechen, enthalten seyn müssen, und zwar mit den nach 85) zugehörigen Coeffizienten, sobald in $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ alle solchen Glieder vorkommen. Es kommt hiebei darauf an, zu zeigen, dass, welches Glied von der Form 81), unter den Bedingungen 82), 83) 84), man für $\frac{d^n P}{dz^n}$ annehmen möge, der Voraussetzung gemäss in $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ sich Glieder finden müssen, aus welchen jenes nach §. 16 entstehen wird, und dass alle so entstandenen Glieder in $\frac{d^n P}{dz^n}$ zusammen genommen ein Glied mit dem Goeffizienten (85) geben werden.

Es sey daher irgend ein Glied (81) gegeben, welches den Bedingungen (82), (83), (84) entspricht; wir müssen untersuchen, ob, und welche Glieder in $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ enthalten seyn müssen, die vermöge der allgemeinen Formel (78) jenes Glied (81) für $\frac{d^n P}{dz^n}$ hervorbringen werden.

Ein Glied von $\frac{d^n P}{dz^n}$ wird vermöge 16. aus einem Gliede von $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ nur dadurch erhalten, indem man entweder die Potenz von p_1 oder einen andern Factor des Letzteren ausschliesslich für z oder auch für x differentiirt, wobei man im letzteren Falle, wenn das Zeichen ausser Acht gelassen wird, noch mit $p_1^{-1} \cdot {}^1p$ multipliziren muss.

Differentiirt man nun zuerst die Potenz von p^1 für z, so wird nach (86) der subtractive Exponent von p^1 um 1 grösser, und es kömmt der Factor ${}^1p_1$ hinzu: damit daher das erhaltene Glied von $\frac{d^n P}{dz^n}$ das Glied (81) sey, muss das Vorige einen um 1 kleineren Exponenten von p^1, und zugleich um einen Factor ${}^1p_1$ weniger haben, als (81); folglich kann es kein Anderes seyn, als:

$$(90) \quad p_1^{-(m-1)} \cdot {}^1p_k \cdot {}^1p^a \cdot {}^1p_1^{b-1} \cdot {}^2p^c \cdot p_2^d \ldots\ldots {}^\alpha p_a^q \ldots\ldots$$

Der Coeffizient eines solchen Gliedes in $\frac{d^{n-1} P}{dz^{n-1}}$ ist nach 85)

$$(91) \quad \frac{(m-2)!\,.\,(n-1)!}{(k-)!\,.\,l!\,.\,a!\,.\,(b-1)!\,.\,(2!)^c\,.\,c!\,..\,(\alpha!)^q\,.\,(a!)^q!\ldots}$$

Um sowohl diesen, als auch die nachfolgenden Coeffizienten so kurz, als möglich, darzustellen, wollen wir

$$(92)\quad C = \frac{(m-2)\,.\,.\,(n-1)!}{(k-1)!\,1!\,.\,a!\,.\,b\,.!\,(2!)^c\,.\,c!\,.\,.\,(\alpha!)^q\,.\,(a!)^q\ldots}$$

setzen. Dadurch verwandelt sich 91) in C. b, und dieser Coeffizient zu (90) noch hinzu gesetzt, gibt das vollständige Glied für $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$.

$$(93)\quad C.\,b.\,p_1^{-(m-1)}\,.\,{}^1p_k\,.\,{}^1p^a\,.\,{}^1p_1^{b-1}\,.\,{}^2p^c\,.\,p_2^d\,\ldots\ldots\,{}^\alpha p_q^2\ldots,$$

aus welchen durch das Differentiiren von $p_1^{-(m-1)}$ für z ein Glied, wie 81), für $\frac{d^nP}{dz^n}$ entstehen wird. Dieses Glied 93) muss nach der hier gemachten Voraussetzung in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ wirklich vorkommen, weil es von der Form 81) ist, und den Bedingungen 82), 83), 84) entspricht: nur dann würde es in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ fehlen, wenn $b = 0$ wäre, allein dann ist ohnehin der Coeffizient $C\,b = 0$, und kann daher auch auf das Folgende keinen Einfluss haben.

Auf gleiche Art untersuche man ferner, wie die Glieder von $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n+1}}$ beschaffen seyn müssen, wenn, mit Ausnahme der Potenz von p_1, einer der anderen, darin vorkommenden Factoren für z differentiirt wird,

um dadurch das Glied (81) für $\frac{d^nP}{dz^n}$ zu erhalten. Man wird, wenn man die gehörigen Coefficienten, und zwar nach (92) abgekürzt, hinzu setzt, folgende Glieder finden:

(94) $C(m-1)l.p_1^{-m}.{}^{l-1}P_k.{}^1p^a.{}^1p_1^b.{}^2p^c.p_2^d\ldots{}^\alpha p_a^q\ldots,$

wobei ${}^{l-1}P_k$

$\frac{C(m-1)2c}{a+1}.p_1^{-m}.{}^lP_k.{}^1p^{a+1}.{}^1p_1^b.{}^2p^{c-1}.p_2^d\ldots{}^\alpha p_a^q\ldots,$

wobei ${}^1p^{a+1}$

$\frac{C(m-1)2f}{b+1}.p_1^{-m}.{}^lP_k.{}^1p^a.{}^1p_1^{b+1}.{}^2p^c.p_2^d.{}^1p_2^e.{}^2p_1^{f-1}\ldots$

$\ldots\ {}^\alpha p_a^q\ldots,$ wobei ${}^1p^{b+1}$

$\frac{C(m-1)3g}{c+1}.p_1^{-m}.{}^lP_k.{}^1p^a.{}^1p_1^b.{}^2p^{c+1}.p_2^d.{}^1p_2^e.{}^2p_1^f.{}^3p^{g-1}$

$\ldots,\ {}^\alpha p_a^q\ldots,$ wobei ${}^2p^{c+1}$

$\frac{C(m-1)e}{d+1}.p_1^{-m}.{}^iP_k.{}^1p^a.{}^1p_1^b.{}^2p^c.p_2^{d+1}.{}^1p_2^{e-1}.{}^2p_1^f\ldots$

$\ldots\ {}^\alpha p_a^q\ldots,$ wobei p_2^{d+1}

für z zu differentiiren ist.

und allgemein, wenn man zu dem Gliede (81) noch den Factor ${}^{\alpha+1}p_a^r$ hinzu gesetzt denkt,

(95) $\frac{C(m-1)(\alpha+1)r}{q+1}p_1^{-m}.{}^lP_k.{}^1p^a.{}^1p_1^b.{}^2p^c\ldots{}^\alpha p_a^{q+1}.{}^{\alpha+1}p_a^{r+1}$

$\ldots,$ wobei ${}^\alpha p_a^{q+1}$

So wie wir bisher die Glieder $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ aufgesucht

haben, aus welchen durch Differentiirung eines Factors für z das Glied 81) für $\frac{d^nP}{dz^n}$ entstehen muss, bestimme man nun auch diejenigen Glieder in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$, aus welchen durch Differentiirung eines Factors ausschliesslich für x, und Multipliciren mit $p_1^{-1}\cdot{}^1p$ dasselbe Glied 81) zum Vorscheine kommen wird. Man findet zuerst:

$$(96)\ \frac{C.2ad}{m-2}\cdot p_1^{-(m-2)}\cdot \overset{1}{\underset{k}{P}}\cdot {}_1p^{a-1}\cdot {}^1p_1^{\,b}\cdot {}^2p^c\cdot p_2^{d-1}\cdot {}^1p_1^{\,e} \,\ldots \underset{a}{{}^\alpha p^q}\ldots,$$

wobei $p_1^{-(m-2)}$ für ausschliesslich zu differentiiren ist, und hernach noch mit $p_1^{-1}\cdot{}^1p$ multiplicirt werden muss. Ferner erhält man die Glieder:

$$(97)\ C.(k-1)\,a.p_1^{-(m-1)}\cdot\overset{1}{\underset{k-1}{P}}\cdot{}^1p^{a-1}\cdot{}^1p_1^{\,b}\cdot{}^2p^c\ldots\ldots\underset{a}{\overset{\alpha}{p}}{}^q\ldots\ldots,\ \text{wobei}\ \overset{1}{\underset{k-1}{P}}$$

$$Cb.p_1^{-(m-1)}\cdot\overset{1}{\underset{k}{P}}\cdot{}^1p^a\cdot{}^1p_1^{\,b-1}\,{}^2p\cdot{}^cp_2^{\,d}\ldots\ldots\underset{a}{\overset{\alpha}{p}}{}^q\ldots\ldots,-{}^1p^a$$

$$\frac{C.rae}{b+1}\cdot p_1^{-(m-1)}\cdot\overset{1}{\underset{k}{P}}\cdot{}^1p^{a-1}\cdot{}^1p_1^{\,b+1}\cdot{}^2p^{e}\cdot p_2^{d}\cdot{}^1p_2^{\,e-1}\ldots\ldots\overset{\alpha}{p}{}^q\ldots\ldots,-{}^1p_1^{\,b+1}$$

$$\frac{C.af}{c+1}\cdot p_1^{-(m-1)}\cdot\overset{1}{\underset{k}{P}}\cdot{}^1p^{a-1}\cdot{}^1p_1^{\,b}\,p^{c+1}\cdot p_2^{\,d}\cdot{}^1p_2^{\,e}\cdot{}^2p_1^{\,f-1}\ldots\ldots,\ \overset{\alpha}{p}{}^q_a\ldots,-{}^2p^{e+1}$$

für x zu differentiiren ist.

und allgemein, wenn man zu dem Gliede 81) noch den Factor $\overset{\alpha}{p}{}^{t}_{a+1}$ hinzu gesetzt denkt,

$$(98)\ \frac{C.(a+1)at}{q+1} p_1^{-(m-1)} . \overset{l}{P}_{k} . {}^{1}p^{a-1} . {}^{1}p_1^{b} .. {}^{2}p^{c} ... \overset{\alpha}{p}{}_{a}^{q+1} \overset{\alpha}{p}{}_{a+1}^{t-1} ...,\ \text{wobei}\ \overset{\alpha}{p}{}_{a}^{q+1}$$

Aus jedem der aufgezählten Glieder, und zwar nur aus diesem allein, wird durch die angezeigten Differentiirungen vermöge 16. für $\frac{d^n P}{dz^n}$ das Glied 81) entstehen. Es ist daher leicht den Coeffizienten dieses Gliedes in $\frac{d^n P}{dz^n}$ zu finden. Denn man braucht nur ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, welche nach 18. bei den einzelnen Gliedern ohnehin einerlei seyn müssen, alle Coeffizienten der aus 93) bis 98) entstehenden Glieder zusammen zu addiren, und die Summe wird der gesuchte Coeffizient von 81) seyn. Es wird aber durch Differentiren von $p_1^{-(m-1)}$ für z ausschliesslich der Coeffizient des aus 93) hervorgehenden Gliedes

99) C. (m—1) b,

und die Coeffizienten der aus 94) und 95) entspringenden Glieder werden durch Differentiiren der übrigen Factoren für z ausschliesslich:

100) C. (m—1) l,
C. (m—1) 2 c,
C. (m—1) 2 f,
C. (m—1) 3 g,
C. (m—1) e,
. . . . .
. . . . .
C. (m—1) $(\alpha+1)$ r, u. s. f.

Ferner erhält man aus 96) durch Differentiiren von $p_x^{-(m-2)}$ für x den Coefficienten

101) $$C.\ 2ad,$$

und aus 97) und 98) entstehen durch Differentiiren der übrigen Factoren für x die Coefficienten:

102) $$C.\ a\,(k-1),$$
$$C.\ ab,$$
$$C.\ 2ae$$
$$C.\ af$$
$$\cdots\cdot$$
$$\cdots\cdot$$
$$C\ (\alpha+1)\ at,\ \text{u. s. f.}$$

Die Coefficienten 101) und 102) zusammen addirt geben, mit Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren C und a, die Summe:

103) $$Ca\,(k-1+b+2d+2e+f+\ldots\ldots+(\alpha+1)\,t+\ldots),$$

oder, wegen der bei dem Gliede 81) als gültig vorausgesetzten Gleichung 83), auch:

104) $$C.a\ (m-1).$$

Addirt man nun zu 104) noch die Coefficienten 99) und 100), indem man jetzt die gemeinschaftlichen Factoren C und m—1 ausscheidet; so erhält man den Coefficienten des Gliedes 81) in $\frac{d_n P}{dz_n}$ vollständig,

105) $$C.\ (m-1)\ (1+a+b+2c+e+2f+3g+\ldots.$$
$$+(\alpha+1)\,r+\ldots.),$$

oder, wegen der ebenfalls gültigen Gleichung 84)

106) $$C.\ (m-1).n,$$

und, wenn man hierin für C den Werth aus 92) setzt, kommt genau der Coefficient 84) zum Vorscheine.

Dadurch ist nun erwiesen, dass in $\frac{d^n P}{dz^n}$ jedes Glied

von der Form 81), welches den Bedingungen 82), 83), 84) entspricht, mit dem Coefficienten 85) vorkommen müsste, wenn in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$ alle solchen Glieder mit den gehörigen Coefficienten wirklich vorhanden wären.

20.

Vermöge des in 19 erwiesenen bedingten Satzes müssten im Allgemeinen in $\frac{d^nP}{dz^n}$ alle Glieder von der Form 81), welche den Bedingungen 82), 83), 84) entsprechen, mit den Coefficienten 85) vorkommen, wenn sich nachweisen liesse, dass auch nur in einem der ersten Differentialquotienten von P alle solchen Glieder mit den gehörigen Coefficienten wirklich enthalten seyen. Bei dem ersten Anblicke der in 12 angeführten Differentialquotienten scheint diess jedoch keineswegs der Fall zu seyn, indem man leicht bemerkt, dass schon in $\frac{dP}{dz}$ die Glieder

$$107) \quad p_1^{-1} P.{}^1p_1 \text{ und } p_1^{-2}. P. {}^1p. p_2.$$

fehlen, obwohl sie allen Bedingungen Genüge leisten. Ueberhaupt sieht man, dass in keinem der drei ersten Differentialquotienten ausser dem ersten Gliede noch ein Glied enthalten ist, worin P keinen Differentialexponenten für x hätte; mit Ausnahme dieser Glieder sind aber wirklich alle den Gesetzen 13. 2) und 3) entsprechenden Glieder vorhanden. Um das Wegbleiben der Glieder, worin P keinen Differen-

tialexponenten für x enthalten sollte, zu erklären, darf man nur untersuchen, welchen Coefficienten ein solches Glied haben müsste. Indem man in 85) k=o setzt, findet man:

$$108)\quad \frac{(m-1)!\,.\,n!}{(-1)!\,.\,l!\,.\,a!\,.\,b!\,.\,(2!)^c\,.\,c!\,.\,\ldots},$$

und dieser Coefficient hat den Werth o, weil vermöge der allgemeinen Formel

$$109)\quad (n-1)! = \frac{n!}{n} = \frac{(n+1)!}{n(n+1)}$$

auch

$$110)\quad (-1)! = \frac{1!}{0.1} = \frac{1}{0}$$

seyn muss. Es können daher die Glieder, worin k=o ist, desswegen nicht vorkommen, weil ihre Coefficienten o sind, oder mit andern Worten: man kann sich vorstellen, dass in den Differentialquotienten 79) auch die Glieder, worin k=o ist, mit ihren, gemäss der Formel 85) zugehörigen, Coefficienten, d. i. o, wirklich enthalten seyen.

Hiervon macht nur der Fall eine Ausnahme, wenn in 108) zugleich m=o ist, dann ist nämlich der Werth jenes Coefficienten nicht mehr o, sondern vielmehr 1, da in diesem Falle vermöge der Bedingungsgleichungen 82), 83), 84) $a=b=c=\ldots.=q=\ldots=o$ und $l=n$ seyn wird. Hieraus folgt aber auch, dass sich in diesem Falle nur das einzige Glied ^nP befinde, welches nicht fehlen darf, sondern den Coefficienten 1 erhalten muss, und man sieht aus §. 12, dass dieses mit dem gehörigen Coefficienten in den drei ersten Differentialquotienten wirklich vorkomme.

Aus dem Angeführten ergibt sich, dass die drei

ersten Differentialquotienten in 12. wirklich alle Glieder von der Form 81), welche den Bedingungen 82), 83), 84) entsprechen, mit den gehörigen Coefficienten 85) enthalten, daraus folgt nach 19., dass diess auch überhaupt für jeden Differentialquotienten gelten müsse.

Noch muss bemerkt werden, dass man vielleicht die gegebene Erklärung über das Wegbleiben der Glieder, worin $k = o$ seyn sollte, und das Vorkommen des Gliedes ${}^nP$ für gezwungen, oder wohl gar für nicht vollkommen genügend halten könnte. Es wäre nicht schwer gewesen, dasselbe Resultat auf eine, in jeder Rücksicht genügende, Art zu erhalten, indem sich aus 19. leicht hätte erweisen lassen, dass das Wegbleiben aller Glieder in $\frac{d^{n-1}P}{dz^{n-1}}$, worin $k = o$ seyn müsste, mit Ausnahme von ${}^{n-1}P$, keine andere Wirkung habe, als dass auch in $\frac{d^nP}{dz^{n-1}}$, keine solchen Glieder vorkommen können, mit alleiniger Ausnahme des Gliedes ${}^nP$: da diess jedoch etwas weitläufiger ausgefallen seyn würde; so schien es räthlicher, den kürzeren Weg einzuschlagen, und den anderen bloss anzudeuten.

21.

Um nun, nachdem die allgemeine Gültigkeit der Gesetze in 13. auf dem in 15. vorgezeichneten Wege bereits erwiesen ist, jeden Differentialquotienten von P auch bequem bezeichnen zu können, bemerke man, dass die Summe aller Glieder in $\frac{d^nP}{dz^n}$, welche

denselben Factor p_1^{-m} enthalten, eine Art der sogenannten combinatorischen Integrale bildet, wovon man 81) verbunden mit dem Coefficienten 85) als das allgemeine Glied und die Gleichungen 82), 83) und 84) als die Bedingungen ansehen kann*). Der Kürze wegen wollen wir dieses combinatorische Integral bloss durch

$$111)\quad \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$$

bezeichnen, ohne dass allgemeine Glied und die Bedingungsgleichungen beizusetzen, wobei man noch bemerken muss, dass

$$112)\quad \overset{n}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} = \overset{n}{\mathfrak{S}}$$

seyn werde. Nach dieser Bezeichnungsart ist nun dem Erwiesenen gemäss:

$$113)\ \frac{d\,\mathfrak{S}}{dz^n} = \overset{n}{\underset{0}{\mathfrak{S}}} - p_1^{-1} \cdot \overset{n}{\underset{1}{\mathfrak{S}}} + p_1^{-2} \cdot \underset{2}{\mathfrak{S}} - p^{-3} \cdot \overset{n}{\underset{3}{\mathfrak{S}}} + \ldots$$
$$+ (-p_1)^{-m} \cdot \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}} + \ldots - p_1^{-(2n-1)} \cdot \overset{n}{\underset{m-1}{\mathfrak{S}}}.$$

*) Man kann dem allgemeinen Gliede auch folgende Gestalt geben:

$$\underset{k}{\overset{l}{p}} \cdot \underset{a}{\overset{\alpha\,a}{p}} \cdot \underset{b}{\overset{\beta\,b}{p}} \cdot \ldots\ldots$$

wodurch der Coefficient 85) sich in

$$\frac{(m-1)!\,.\,n!}{(k-1)!\,.\,l!\,.\,(a!)^a\,.\,(\alpha!)^a\,.\,a!\,.\,(b!)^b\,.\,(\beta!)^b\,.\,b!\ldots}$$

und die Gleichungen 82), 83). 84) in

$$a + b + \ldots\ldots\ldots\ldots = m$$
$$k + a\,a + b\,b + \ldots\ldots = m$$
$$l + \alpha\,a + \beta\,b + \ldots\ldots = n$$

verwandeln.

22.

Es kommt nunmehr noch darauf an, das kombinatorische Integral $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ leicht und sicher darstellen zu können, was auch n und m für ganze, additive Werthe haben mögen. Hiezu bieten sich mehrere Wege dar. Der sogenannte, rein arithmetische Weg, welcher in der Auflösung der drei unbestimmten Gleichungen 82), 83), 84) in ganzen additiven Zahlen für beliebige Werthe von m und n besteht, ist offenbar der weitläufigste und eben deswegen auch der unsicherste. Weit kürzer gelangt man durch combinatorische Hülfsmittel zum Ziele. Betrachtet man nämlich in dem allgemeinen Gliede 81) die gleichen Factoren $^1p_1$, $^1p_1$, u. s. f. von einander abgesondert, so sieht man leicht, dass die Differentialexponenten für z Combinationen mit Wiederhohlungen zur Classe $m+1$ und Zeigersumme n, die Differenzialexponenten für x aber Combinationen mit Wiederhohlungen zur Classe $m+1$ und Summe m aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... n bilden, und dass diese Combinationen in allen möglichen Versetzungen mit einander verbunden sind, mit Ausnahme der Glieder, worin $k=0$ seyn, oder ein Factor p oder p_1 vorkommen würde. Man kann daher, um die Glieder von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ zu finden, folgender Massen zu Werke gehen: Man bilde zuerst aus den Zahlen 0, 1, 2, 3, ... n alle Combinationen mit Wiederholungen zur Classe $m+1$ und Summe m; jede solche Combination verbinde man mit den $m+1$ Factoren P. p. p. p. p..... als Differentialexponenten für x in allen möglichen Versetzungen, zu welchem Behufe man nur dem Factor P alle in jeder einzelnen

Combination vorkommenden, verschiedenen Zahlen (o ausgenommen) als Differentialexponenten für x anzuhängen, die übrigen Zahlen aber jedesmal in beliebiger Ordnung als Differentialexponenten für x hinzusetzen braucht, da die andern Factoren ohnehin alle einander gleich sind. Nun bilde man aus den nähmlichen Zahlen o, 1, 2, 3,....n alle Combinationen mit Wiederholungen zur Classe $m + 1$ und Summe n und verbinde dieselbe in allen möglichen Versetzungen mit den nach der vorigen Regel bereits entstandenen Gliedern, als Differentialexponenten für z. Schliesst man von den, auf diese Weise erhaltenen, Gliedern diejenigen aus, welche einen Factor p oder p_1 enthalten, nimmt von übrig gebliebenen nur die von einander verschiedenen, und setzt ihnen die gehörigen Coefficienten vor; so hat man das combinatorische Aggregat $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$.

Die eben beschriebene Art, um $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ zu finden, ist zwar in der Ausführung nach mancher Abkürzung fähig, doch bleibt sie immer schon bei mässig grossen Zahlen m und n weitläufig, und man ist dabei sehr leicht einem Irrthum ausgesetzt. Ich will daher noch ein anderes Verfahren angeben, wodurch man die Glieder von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ finden kann, und welches mir kürzer und sicherer zu seyn scheint, als das vorhergehende.

23.

Da die Summe der Differentialexponenten sowohl für x, als für z, so wie auch die Anzahl der Factoren

in allen Gliedern von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ gleich gross seyn muss; so wird man aus einem bekannten Gliede von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ alle übrigen finden können, wenn man die Differentialexponenten sowohl für x, als für z von den einzelnen Factoren theilweise und auch ganz wegnimmt, und auf die übrigen Factoren in allen möglichen Combinationen überträgt; es wird nämlich hiedurch im Grunde dasselbe bewirkt, als wenn man alle Combinationen zur bestimmten Summe unter den Factoren auf jede mögliche Art versetzt hätte. Um nun jenes Uebertragen in einer gewissen Ordnung mit Sicherheit vorzunehmen, verfahre man folgender Massen: Man nehme zuerst einen Factor des schon bekannten Gliedes von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ her, vermindere, wenn es angeht, seinen Differentialexponenten z um 1, und addire dieses 1 nach und nach zu dem Differentialexponenten für z eines jeden andern Factors. Eben so übertrage man, wenn es angeht, 1 von den Differentialexponenten für x desselben Factors auf jeden andern Factor. Auf die nämliche Art behandle man nun auch nach und nach alle übrigen Factoren des bekannten Gliedes. Ist diess vollständig geschehen, so nehme man die dadurch gefundenen Glieder, und verfahre mit ihnen auf dieselbe Weise, welche eben für das erste bekannte Glied vorgeschrieben wurde. Auf solche Art fahre man so lange fort, bis man kein Glied mehr finden kann, welches von den bereits erhaltenen verschieden wäre. Man hat hiebei nur zu bemerken, dass man ein schon vorhandenes Glied nicht zum zweitenmale hinsetze, und dass ein Uebertragen von 1 aus dem Differen-

tialexponenten eines Factors auf einen andern nicht angehe, sobald dadurch ein Factor p oder p_1 zum Vorschein kommen, oder P keinen Differentialexponenten für x erhalten würde. Die gegebene Regel ist hinreichend, uns aus einem bekannten Gliede von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ alle übrigen zu finden, es kommt daher nur darauf an, jederzeit ein Glied von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ zu wissen. Wollte man die Glieder von $\overset{n}{\underset{m-1}{\mathfrak{S}}}$ oder $\overset{n-1}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ als bekannt annehmen, so wäre es leicht, daraus ein Glied von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ zu finden: es unterliegt aber auch keiner Schwierigkeit, ein solches für sich, unabhängig von allen übrigen, anzugeben. Ist nähmlich $m \leqq n$, so wird jederzeit

114) $\quad {}^{n-m}P_m \cdot {}^1p^m$

wäre aber $m > n$, so müsste

115) $\quad P_{2n-m} \cdot {}^1p^n \cdot p_1^{m-n}$

ein Glied von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ seyn, wie man sich leicht überzeugen wird, wenn man diese Glieder mit den Bedingungsgleichungen 82), 83), 84) vergleicht. Somit wären wir im Stande, ein Glied von $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ anzugeben, was auch n und m für ganze, additive Zahlen seyn mögen, und daraus nach der vorhin ertheilten Vorschrift alle übrigen zu finden.

Um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, sei $\overset{4}{\underset{5}{\mathfrak{S}}}$ darzustellen. Da hier $n=4$, $m=5$ ist, so erhält man aus 115) das Glied

116) $P_3 . {}^1p^4 . p_2 .$

In diesem Gliede ist nur der Factor P_3 einer Verminderung seines Differentialexponenten für x fähig, und, indem man hiervon 1 wegnimmt und auf die anderen Factoren überträgt, erscheinen folgende zwei Glieder:

117) $P_2 . {}^1p^3 . {}^1p_1 . p_2 , \quad P_2 . {}^1p^4 . p_3 .$

Aus dem ersten Gliede in 117) erhält man durch Verminderung des Differentialexponenten von P_2 um 1 folgende neue Glieder:

118) $P_1 . {}^1p^2 . {}^1p_1^2 . p_2 ; \; P_1 . {}^1p^3 . p_2 . {}^1p_2 , P_1 . {}^1p^3 . {}^1p_1 . p_3 .$

Aus dem zweiten Gliede in 117) entsteht durch Verminderung des Differentialexponenten von P_2 um 1 bloss das neue Glied:

119) $P_1 . {}^1p^4 . p_4 ;$

durch Verminderung des Differentialexponenten von p_3 erhält man kein noch nicht vorhandenes Glied.

Aus dem zweiten Gliede in 118) entspringen durch Verminderung des Differentialexponenten für z in dem Factor ${}^1p_2$ die neuen Glieder:

120) ${}^1P_1 . {}^1p^3 . p_2^2 , \; P_1 . {}^1p^2 . {}^2p . p_2^2 ;$

aus den übrigen Gliedern in 118), so wie auch aus 119) und 120) kommen nur bereits vorhandene Glieder wieder zum Vorscheine.

Somit besteht $\overset{4}{\underset{5}{\mathfrak{S}}}$ nur aus den 9 Gliedern 116) bis 120), und man hat, indem die gehörigen Coefficienten nach 85) hinzu gesetzt werden:

121) $\overset{4}{\underset{5}{\mathfrak{S}}} = 6 P_3 . {}^1p^4 . p_2 + 48 P_2 . {}^1p^3 . {}^1p_1 . p_2 + 4 P_2 . {}^1p^4 . p^3 + 72 P_1 . {}^1p^2 . {}^1p_1 p^2 + 24 P^1 . {}^1p^3 . p^2 . {}^1p_2 + 16 P_1 . {}^1p^3 . {}^1p_1 . p_3 + P_1 . {}^1p^4 . p_4 + 12 {}^1P_1 . {}^1p^3 . p_2^2 + 18 P_1 . {}^1p^2 . {}^2p . p_2^2 .$

24.

Der Formel 113) kann man durch Zusammenziehung aller, nach dem ersten folgenden, Glieder, und vermöge 112) noch eine andere, einfachere Gestalt geben. Es ist nämlich:

$$122)\ \frac{d^nP}{dz^n} = \overset{n}{P} - p^{-(2n-1)}\Big(\underset{1}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}.(-p_1)^{2n-2} + \underset{2}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}(-p_1)^{2n-3} +$$

$$+ \underset{3}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}(-p_1)^{2n-4} + \ldots \underset{m}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}.(-p_1)^{2n-1-m} + \ldots + \underset{2n-1}{\overset{n}{\mathfrak{S}}} \Big).$$

Wir wollen nun dasjenige, was hier zwischen den Klammern enthalten ist, etwas genauer betrachten. Zu diesem Ende setzen wir, dass der Ausdruck 81) ein Glied von $\underset{m}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}$ sei, wobei die Gleichungen 82), 83), 84) gelten müssen. Multipliziren wir dieses Glied mit $(-p_1)^{2n-1-m}$, womit $\underset{m}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}$ in 122) multiplicirt erscheint, so erhalten wir:

$$123)\ \underset{k}{\overset{1}{P}}.(-p_1)^{2n-1-m}.{}^1p_1^a.{}^1p_1^b.{}^2p^c \ldots\ldots \overset{\alpha}{p}{}_\alpha^q \ldots,$$

als ein Glied von $\underset{m}{\overset{n}{\mathfrak{S}}}(-p_1)^{2n-1-m}$. In diesem Gliede ist die Anzahl der Factoren von $\underset{k}{\overset{1}{P}}$ vermöge 82)

$$(124)\ 2n-1-m+a+b+\ldots+q+\ldots$$
$$= 2n-1-m+m = 2n-1,$$

ferner die Summe der Differentialexponenten für x vermöge (83)

$$(125)\ k+2n-1-m+b+2d+\ldots+\alpha q+\ldots$$
$$= 2n-1-m+m = 2n-1,$$

endlich die Summe der Differentialexponenten für z vermöge (84)

(126) $1+a+b+2c+\ldots+\alpha q+\ldots=n.$

Hieraus sieht man, dass in $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}.(-p_1)^{2n-1-m}$ nur solche Glieder vorkommen können, welche die Form (123) haben, und den Gleichungen (124), 125), (126) entsprechen. Man überzeugt sich aber auch leicht, dass in $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}.(-p_1)^{m-1-m}$ alle dergleichen Glieder, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, worin $k=0$ seyn sollte, enthalten seyn müssen. Denn aus jedem solchen Gliede wird durch blosse Hinweglassung des Factors $(-p_1)^{2n-1-m}$ ein Glied von der Form (81) entstehen, welches den Bedingungsgleichungen (82), (83), (84), Genüge leistet, und worin nicht $k=0$ ist, welches daher in $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}$ nicht fehlen darf. Es ist also $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}.(-p_1)^{2n-1-m}$ das Aggregat aller Glieder von der Form

(127) $\;{}^{l}P_{k}.(-p^{1})^{r}.{}^{1}p^{a}.{}^{1}p_{1}^{b}.{}^{2}p^{c}p_{2}^{d}\ldots{}^{\alpha}p_{a}^{q}\ldots,$

bey welchen die Gleichungen

(128) $r+a+b+c+\ldots\ldots+q+\ldots=2n-1,$

(129) $k+r+b+2d+,\ldots+\alpha q+\ldots=2n-1,$

(130) $l+a+b+2c+\ldots+\alpha q+\ldots=n$

gelten, für den Werth $r=2n-1-m$, nur darf nicht $k=0$ seyn.

Nun erhält man aus $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}.(-p_1)^{2n-1-m}$ alle übrigen

Glieder, welche (122) zwischen den Klammern stehen, indem man für m nach und nach alle ganzen Zahlen von 1 bis 2n—1 setzt, oder, was einerlei ist, indem man für r alle Zahlen von o bis 2n—2 annimmt; einen grösseren Werth, als 2n—2, kann aber r ohnehin nicht haben, weil sonst vermöge (129) $k = o$ seyn müsste: daher ist das in (122) zwischen den Klammern Enthaltene das Aggregat aller Glieder von der Form (127) mit den Bedingungsgleichungen (128), (129), (130), jedes Glied mit dem gehörigen Coefficienten multiplicirt, nur darf nicht $k = o$ seyn. Man sieht, dass diess ein combinatorisches Integral ist, wovon (127) verbunden mit dem Coefficienten (85), in welchem jedoch noch anstatt m der Werth $2n-1-r$ gesetzt werden muss, das allgemeine Glied ist. Man kann dasselbe kurz durch $\overset{n}{\mathfrak{S}}$ bezeichnen, so dass

$$(131)\quad \overset{n}{\mathfrak{S}} = \overset{n}{\mathfrak{S}}_{1}.(-p_1)^{2n-2} + \overset{n}{\mathfrak{S}}_{2}.(-p_1)^{2n-3} + \ldots$$
$$+ \overset{n}{\mathfrak{S}}_{m}.(-p^1)^{2n-1-m} + \ldots\ldots + \overset{n}{\mathfrak{S}}_{2n-1}$$

ist, und wenn man diesen Werth in (122) substituirt, erhält man:

$$(132)\qquad \frac{d^n P}{dz^n} = {}^n p - p_1^{-(2n-1)}.\overset{n}{\mathfrak{S}}.$$

25.

Es ist in die Augen springend, dass das in 23 enthaltene Verfahren auf ganz gleiche Weise auch zur Darstellung des combinatorischen Integrals $\overset{n}{\mathfrak{S}}$ dienen könne. Man wird nämlich durch Uebertragung der

Differentialexponenten auf die in §. 23 angegebene Art aus einem bekannten Gliede von $\overset{n}{\mathfrak{S}}$ alle übrigen finden; wobei man nur zu bemerken hat, dass hier der Factor p_1 nicht mehr ausgeschlossen werden darf, und dass man auf das Zeichen eines jeden Gliedes, welches von der Anzahl der darin vorkommenden Factoren p_1 abhängt, gehörige Rücksicht nehmen müsse. Ein Glied von $\overset{n}{\mathfrak{S}}$ kann man aber leicht angeben, denn ein solches ist gewiss

$$(133) \qquad P_1 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-1},$$

weil es allen Bedingungen Genüge leistet.

Aus diesem Gliede (133), welches additiv seyn muss, weil darin p_1 gar nicht vorkommt, findet man auf die eben bemerkte Art folgende drei Glieder:

$$(134) \quad P_2 \cdot p_1 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-2},\ P_1 \cdot p_1 \cdot {}^1p^{n-1} \cdot {}^1p_1 \cdot p_2^{n-2},$$
$$P_1 \cdot p_1 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-3} \cdot p_3,$$

worin p_1 nur einmal vorkommt, und welche daher subtractiv sind. Aus (134) findet man auf dieselbe Art folgende zehn Glieder:

$$(135) \quad P_3 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-3},\ P_2 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^{n-1} \cdot {}^1p_1 \cdot p_2^{n-3},$$
$$P_2 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-4} \cdot p_3,$$
$${}^1P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^{n-1} \cdot p_2^{n-2},\ P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^{n-2} \cdot {}^2p \cdot p_2^{n-2},$$
$$P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^{n-1} \cdot p_2^{n-3} \cdot {}^1p_2,$$
$$P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^{n-2} \cdot {}^1p_1^2 \cdot p_2^{n-3},\ P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^{n-1} \cdot {}^1p_1 \cdot p_2^{n-4} \cdot p_3,$$
$$P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-5} \cdot p_3^2,\ P_1 \cdot p_1^2 \cdot {}^1p^n \cdot p_2^{n-4} \cdot p_4,$$

welche additiv seyn müssen, weil sie p_1^2 als Factor enthalten. Auf die nähmliche Art kann man fortfahren, neue Glieder zu entwickeln, bis $\overset{n}{\mathfrak{S}}$ vollständig gefunden ist.

26.

Wir sind nunmehr im Stande, den Werth von $\frac{d^nP}{dz^n}$, entweder nach der Formel (113), oder nach (132), vollständig anzugeben, was auch n für eine ganze additive Zahl seyn mag. Berechnet man nun auf diese Weise die Werthe von

$$P,\ \frac{dP}{dz},\ \frac{d^2P}{dz^2},\ \frac{d^3P}{dz^3},\ \ldots\ldots\ \frac{d^nP}{dz^n}.\ \ldots$$

und setzt darin nach 11. $z=0$, und für x denjenigen Werth, welchen die Gleichung (71) angibt; so hat man nach (11) die Coefficienten der Entwicklungsreihe (10), und es ist:

$$(137)\quad F(x,z)=P+\frac{z}{1}.\left(\overset{1}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}-p_1^{-1}.\overset{1}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}\right)$$

$$+\frac{z^2}{1.2}\left(\overset{2}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}-p_1^{-1}.\overset{2}{\underset{1}{\mathfrak{S}}}+p_1^{-2}.\overset{2}{\underset{2}{\mathfrak{S}}}-p_1^{-3}.\overset{2}{\underset{3}{\mathfrak{S}}}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{z^n}{n!}.\left(\overset{n}{\underset{0}{\mathfrak{S}}}-p_1^{-1}.\overset{n}{\underset{2}{\mathfrak{S}}}+p_1^{-2}.\overset{n}{\underset{2}{\mathfrak{S}}}-\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+(-p_1)^{-m}.\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{S}}}+\ldots-p_1^{-(2n-1)}\overset{n}{\underset{2n-1}{\mathfrak{S}}}\right)+\ldots,$$

oder auch:

$$(137)\quad F(x,z)=P+\frac{z}{1}\left({}^1P-p_1^{-1}.\overset{1}{\mathfrak{S}}\right)$$

$$+\frac{z^2}{1.2}.\left({}^2P-p_1^{-3}\overset{2}{\mathfrak{S}}\right)+\frac{z^3}{1.2.3}.\left({}^3P-p_1^{-5}.\overset{3}{\mathfrak{S}}\right)+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{z^n}{n!}\left({}^nP-p_1^{-(2n-1)}.\overset{n}{\mathfrak{S}}\right)+\ldots$$

Diese Reihen dienen zur Entwicklung einer beliebigen Function von x und z nach Potenzen von z, wenn zwischen x und z was immer für eine Gleichung f(x, z)

$= 0$ besteht. Man könnte nun einzelne Anwendungen derselben auf einige, näher bestimmte Fälle machen: allein ich fürchte ohnehin schon allzu weitläufig gewesen zu seyn, und darf daher die Geduld des Lesers nicht noch länger auf die Probe stellen. Nur glaube ich hinzu fügen zu dürfen, dass die von Herrn Prof. Degen in den astronomischen Nachrichten *) aufgestellte zweite Formel zur Umkehrung der Reihen nichts anderes, als ein einzelner Fall der obigen Reihen ist, welchen man erhält, wenn man

$$p = fx - z$$

setzt, wodurch, wegen $^{1}p = -1$, die Gesetze 13. sich in die von Herrn Prof. Degen angegebenen verwandeln.

II. Neue Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks, von Leopold Schulz von Strasznicki, Adjuncten und Supplenten der Lehrkanzel der Physik und angewandten Mathematik an der Wiener k. k. Hochschule.

Da das geradlinige Dreieck die einfachste geometrische Figur ist, und somit zur Grundlage beinahe jeder geometrischen Untersuchung dient, so ist es ganz natürlich, dass es der Gegenstand des Nachdenkens der ersten Begründer dieser Wissenschaft war, und dass alle nachfolgenden Geometer, die Untersuchung

---

*) Astronomische Nachrichten, herausgegeben von H. C. Schumacher. 2. Band, Nr. 39. Altona, 1824.

der Eigenschaften desselben sich zum angelegentlichsten Geschäfte machten. Wenn man, wie es gewöhnlich geschieht, Thales (640 v. Chr. G.) als den ersten annimmt, der sich der Untersuchung des Dreiecks widmete, so kann man sagen, dass der menschliche Verstand sich durch einen Zeitraum von dritthalbtausend Jahren mit Auffindung neuer Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks beschäftige; bedenkt man nun, welche ausgezeichnete Männer in diesem Fache gearbeitet haben, so bleibt es wirklich staunenswerth, dass es bisher noch immer möglich gewesen ist, neue Eigenschaften anzugeben, deren alle vorhergehenden Geometer nicht erwähnen. Zu einer solchen Nachlese soll auch meine gegenwärtige Abhandlung ein kleiner Beitrag seyn.

Die Kenntnisse, die man sich von dem geradlinigen Dreiecke erworben, sind sehr mannigfaltiger Art. Einige lehren aus den sechs ein Dreieck bestimmenden Elementen, wenn drei gegeben sind, die übrigen finden, wodurch die Trigonometrie ihre Begründung erhielt, deren ersten Ursprung wir bei den Griechen, Vervollkommnung bei den Arabern, und Ausbildung bei den Deutschen zu suchen haben.

Ein anderer Theil beschäftigt sich mit Verwandlung des Dreiecks in andere Figuren und umgekehrt, mit Theilung desselben, mit Construction von Dreiecken, deren Seiten und Winkel gewissen Bedingungen unterworfen seyn sollen, u. s. w. Von dieser existirt eine Unzahl von Lehrsätzen und Aufgaben in den Schriften der Mathematiker aus allen Jahrhunderten.

Man kann endlich auch Puncte die in gewisser Beziehung gegen die Ecken oder Seiten des Dreiecks

symmetrisch liegen, in Betrachtung ziehen, wie z. B. den Mittelpunct des eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreises, den Schwerpunct u. s. w. Da um diese Eigenschaften sich die nachfolgende Abhandlung zunächst dreht, so will ich nur einige der hieher Bezug habenden Vorarbeiten anführen.

Wer eigentlich der erste war, der den Mittelpunct des umgeschriebenen und eingeschriebenen Kreises beim Dreiecke in Betrachtung zog, lässt sich nicht mit Bestimmtheit angeben, da beide in Euclids Elementen der Geometrie vorkommen, und uns sichere literarische Kenntnisse über die Zeiten vor Euclides mangeln. Vom Schwerpuncte des Dreiecks spricht zuerst Archimedes im ersten Buche vom Gleichgewichte der Ebenen, Satz 14. Er sagt: Eines jeden Dreiecks Schwerpunct liegt in demjenigen Puncte, in welchem die aus den Winkelspitzen nach den Mitten der Seiten gezogenen Linien sich schneiden.« *) Meines Wissens ist Johannes (Müller) de regio Monte der erste, der erwähnt, dass die drei Perpendikel die man von den Ecken des Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten fällt, sich in einem einzigen Puncte schneiden. **) Gerbert, nachheriger Papst Sylvester II., beschäftigte sich mit dem Durchmesser des in ein rechtwinkliges Dreieck beschriebenen Kreises, und fand dafür einen sehr einfachen Ausdruck***). Im Allgemeinen lehrt Ludolph van Ceulen die

---

*) Archimedes von Syrakus vorhandene Werke. Aus dem Griechischen übersetzt von Nizze. Stralsund 1824.

**) Joannis de regio monte de triangulis omnis modis, libri quinque. Norimbergae 1533.

***) Bern. Pezii Thesaurus anecdotorum novissimus. Augspurg 1721. Pars II. p. 6.: Gerherti Geometria.

Grösse des Halbmessers des ein- und umgeschriebenen Kreises bei einem jeden Dreiecke finden*). Auch Newton fand diesen Gegenstand seines Nachdenkens nicht unwerth; er beschäftigte sich mit Auffindung derjenigen Puncte, deren Distanzen von den Endpuncten des Dreiecks in bestimmten Verhältnissen stehen **). Philipp Naudé in seinem trigonoscopiae cujusdam novae conspectu, welchen Titel er wählte, um seine Arbeit von der trigonometrischen zu unterscheiden, betrachtet drei Trieden von Puncten:

Die drei Halbirungspuncte der Seiten, die Durchschnitte jeder Seite mit der Linie, die den gegenüberstehenden Winkel halbirt, und die Durchschnitte jeder Seite mit dem Perpendikel vom gegenüberstehenden Eckpuncte. Er bemerkt ferner, dass sich durch eine verschiedene Verbindung dieser Puncte eine Zahl von 678 Aufgaben ergibt, wozu er anfügt, dass man daraus ersehen könne, wie bei Weitem noch nicht alles erschöpft sey, was sich über das Dreieck sagen lässt.

Euler beschäftiget sich in der Abhandlung: Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum, Novi. Comment. Petrop. T. XI. mit der Bestimmung der gegenseitigen Entfernung der oben genannten vier Hauptpuncte des geradlinigen Dreiecks. Er drückt die Coordinaten dieser Puncte bloss durch die Seiten des Dreieckes aus, und berechnet auf diese Art ihre wechselseitigen Distanzen; da aber diese von

---

*) Ludolphi van Ceulen elementa arithmeticae et geometriae 1615.

**) Miscellanea Berolinensia. Halae 1737 V. und VII. Tom.

allen drei Seiten auf dieselbe Art abhängen, also symmetrische Functionen derselben sind, so führt er statt dieser $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$ $r = abc$, wo a, b, c die Seiten des Dreiecks bedeuten, in die Rechnung ein, durch welche Abkürzung die ungeheuer weitläufigen Ausdrücke für die Distanzen etwas zusammenschmelzen. An diese Untersuchung knüpft er die Aufgabe an, wenn die Distanzen dieser 4 Hauptpuncte gegeben sind, die drei Seiten des Dreiecks zu finden, welches zu ihnen gehört. Zu diesem Behufe nehme man die Formeln, wo diese Distanzen durch p, q, r ausgedrückt sind. Aus diesen 4 Gleichungen suche man die Werthe von p, q, r, welches angeht, da die vierte Gleichung eine nothwendige Folge der drei andern seyn muss.

Wir haben daher nur drei Gleichungen zur Bestimmung von p, q, r; hat man diese gefunden, so formire man die Gleichung $z^3 - pz^2 + qz - r = 0$, und die drei Wurzeln dieser Gleichung geben die drei Seiten des Dreiecks.

Nach dieser Zeit erhielt die analytische Geometrie eine veränderte Gestalt; man war bemüht den algebraischen Ausdrücken eine elegantere Form zu geben: dadurch stieg auch der Sinn für Symmetrie in der Geometrie, daher die Eigenschaften der oben erwähnten Puncte aufs neue untersucht und mit neuen vermehrt wurden. Es würde jedoch die Grenzen dieses Aufsatzes bei Weitem überschreiten, wollte ich alles was in dieser Beziehung geleistet wurde, in Erwähnung bringen; ich begnüge mich daher anzuführen, dass Gergonne's Annalen der Mathematik eine grosse Anzahl hierher gehörenden Aufsätze enthalten; ins-

besondere aber finde ich mich verpflichtet des Hrn. Dr. Feuerbach's „Eigenschaften einiger merkwürdigen Puncte des geradlinigen Dreiecks" Nürnberg. 1822. anzuführen, welches vortreffliche Werkchen an Reichthum und Eleganz der Eigenschaften fast alle andere Vorarbeiten übertrifft.

Aus dem Angeführten ersieht man, dass man bisher mit der Untersuchung der Eigenschaften der bekannten symmetrischen Puncte beschäftiget war; der Zweck meiner kleinen Arbeit hingegen ist die Anzahl dieser Puncte zu vermehren, und ihre gemeinschaftliche Entstehungsart nachzuweisen.

1) Es ist leicht zu zeigen, dass der Schwerpunct eines Dreiecks die Eigenschaft hat, dass die Quadrate seiner Distanzen von den Eckpuncten ein Minimum ist; denn nennen wir die Coordinaten der Eckpuncte x, y; x', y'; x'', y'', und p, q die Coordinaten desjenigen Punctes, dessen Distanzen die verlangte Eigenschaft besitzen, und sey U die Summe der Quadrate dieser Distanzen daher

$$U = (x-p)^2 + (y-q)^2 + (x'-p)^2 + (y'-q)^2 + (x''-p)^2 + (y''-q)^2,$$

so muss, damit U ein Minimum werde,

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) = 0 \quad \left(\frac{dU}{dq}\right) = 0$$

seyn. Dieses gibt

$$x - p + x' - p + x'' - p = 0$$
$$y - q + y' - q + y'' - q = 0$$

woraus

$$p = \frac{x + x' + x''}{3}, \quad q = \frac{y + y' + y''}{3}$$ folgt.

Man sieht daher, dass der Schwerpunct die oben ausgesprochene Eigenschaft besitzet.

2) Auf gleiche Art wollen wir nun die Coordinaten desjenigen Punctes bestimmen, der die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate seiner Distanzen von den drei Seiten des Dreiecks ein Minimum ist.

Nehmen wir zu diesem Behufe den Punct C (Fig. 6) des Dreiecks ABC als den Anfangspunct der Coordinaten an, und setzen wir $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Es seyen ferner x', y' und x'', y'' die Coordinaten der Puncte B und A; x, y die Coordinaten des zu suchenden Punctes, und p, p', p'' die Längen der Perpendikel, die von diesem Puncte auf a, b, c gefällt werden, also

$$p = \frac{yx' - xy'}{a}$$

$$p' = \frac{xy'' - xy''}{b}$$

$$p'' = \frac{y\,(x''-x') - x\,(y''-y') + \triangle}{c}$$

wo $\triangle = x'y''-y'x''$ ist.

Ist $U = p^2 + p'^2 + p''^2$

so muss, damit U ein Minimum werde,

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = 2\left(p\frac{dp}{dx} + p'\frac{dp'}{dx} + p''\frac{dp''}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = 2\left(p\frac{dp}{dy} + p'\frac{dp'}{dy} + p''\frac{dp''}{dy}\right) = 0$$

seyn. Das ist:

$$\frac{yx'-xy'}{a^2}x' + \frac{xy''-yx''}{b^2}x'' +$$

$$\frac{(x''-x')y-(y''-y')x+\triangle}{c^2}(x''-y') = 0$$

$$\frac{yx'-xy'}{a^2}y'-\frac{xy''-yx''}{b^2}y''+$$

$$\frac{(x''-x')y-(y''-y')x+\Delta}{c^2}(y''-y')=0$$

woraus

$$\left\{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{x''^2}{b^2}+\frac{(x''-x')^2}{c^2}\right\}y$$

$$-\left\{\frac{x'y'}{a^2}+\frac{x''y''}{b^2}+\frac{(x''-x')\,(y''-y')}{c^2}\right\}x+\frac{\Delta(x''-x')}{c^2}=0$$

$$\left\{\frac{x'y'}{a^2}+\frac{x''y''}{b^2}+\frac{(x''-x')\,(y''-y')}{c^2}\right\}y$$

$$+\left\{\frac{y'^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}+\frac{(y''-y')^2}{c^2}\right\}x+\frac{\Delta(y''-y')}{c^2}=0$$

woraus sich mittelst der gewöhnlichen Eliminationsmethode nach einigen Reductionen ergibt:

$$x=\frac{b^2x'+a^2x''}{a^2+b^2+c^2}$$

$$y=\frac{b^2y'+a^2y''}{a^2+b^2+c^2}$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in die Ausdrücke für p, p', p'', so hat man

$$p=\frac{a\Delta}{a^2+b^2+c^2};\ p'=\frac{b\Delta}{a^2+b^2+c^2};\ p''=\frac{c\Delta}{a^2+b^2+c^2}$$

also

$$ap=\frac{a^2\Delta}{a^2+b^2+c^2};\ bp'=\frac{b^2\Delta}{a^2+b^2+c^2};\ cp''=\frac{c^2\Delta}{a^2+b^2+c^2}$$

daher der Punct, den wir eben gesucht, und den wir der Kürze halber den Minimumpunct nennen wollen, zugleich die Eigenschaft hat, dass durch Verbindung desselben mit den drei Eckpuncten drei Dreiecke entstehen, deren Flächenräume sich wie die Quadrate

der correspondirenden Seiten des gegebenen Dreiecks verhalten, oder mit anderen Worten, dieses Dreieck ist in drei Theile getheilt, die sich wie $a^2 : b^2 : c^2$ verhalten.

Verbinden wir nun der Minimumpunct mit dem Anfangspuncte durch eine Gerade, und untersuchen wir in welchem Puncte die Seite c durch diese Gerade geschnitten wird. Zu diesem Behufe müssen wir x und y aus folgenden Gleichungen

$$y = \frac{b^2y' + a^2y''}{b^2x' + a^2x''} x$$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x')$$

suchen. Wir finden:

$$x = \frac{b^2x' + a^2x''}{a^2 + b^2}, y = \frac{b^2y' + a^2y''}{a^2 + b^2}$$

woraus man Folgendes ableiten kann:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot c$$

$$\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot c$$

daher

$$\frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}{\sqrt{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2}} = \frac{a^2}{b^2};$$

das heisst, wenn man den Minimumpunct mit dem Anfangspuncte verbindet, so wird diese Gerade die Seite c in zwei Stücke theilen, die sich wie die Quadrate der anliegenden Seiten verhalten.

Da man nun jeden Eckpunct nach der Reihe zum Anfangspuncte wählen kann, so wird das oben Ausgesprochene auch für jede Seite gelten; und man kann daher allgemein sagen: Wenn man jede Seite im Ver-

hältnisse der Quadrate der anliegenden Seiten theilet, und diese Theilungspuncte mit den gegenüberstehenden Eckpuncten verbindet, so schneiden sich diese drei Linien in einem einzigen Puncte, welcher die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate seiner Distanzen von den drei Seiten ein Minimum ist.

Um nun diesen Punct geometrisch construiren zu können, müssen wir sehen, wie man eine Seite des Dreiecks im Verhältnisse der Quadrate der anliegenden Seiten theilet. Es sey (Fig. 6) die Seite AB im Verhältnisse der Quadrate der anliegenden Seiten zu theilen. Man ziehe aus dem gegenüberstehenden Endpuncte C die Linie CD = CB senkrecht auf AC, verbinde D mit A, fälle von C auf AD das Perpendikel CR, ziehe durch den Punct R eine Parallele RM zur BD, so ist M der zu suchende Theilungspunct; denn

$$\frac{AR}{RD} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CD}^2}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AR}{RD}$$

also
$$\frac{AM}{MB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$$

Verbindet man C mit M, so liegt der Minimumpunct in dieser Linie, und zieht man eine zweite Linie auf diese Art, so ist besagter Punct der Durchschnittspunct beider Linien.

3) Es sey in (Fig. 7) der Punct M so gewählt, dass

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{CB}^2} \text{ ist.}$$

Aus der Ansicht der Figur ergibt sich nun von selbst

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.m} = \frac{AM}{AC}$$

$$\frac{\sin.\psi}{\sin.n} = \frac{MB}{BC}$$

also:

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BC}{AC}$$

daher:

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{AC}{AB}$$

d. h. verbindet man den Minimumpunct mit einem Eckpuncte, so wird der Winkel an diesem Eckpuncte in zwei Winkel getheilt, deren Sinusse sich wie die anliegenden Seiten verhalten; da dieses nun für jeden Eckpunct gilt, so kann man sagen: Wenn man jeden Winkel des Dreiecks so theilet, dass sich die Sinusse der Theile des Winkels gerade wie die anliegenden Seiten verhalten, so schneiden sich diese Linien in einem einzigen Puncte, und dieser Punct ist der Minimumpunct des Dreiecks.

Stellen wir eine ähnliche Untersuchung bei den übrigen bekannten Puncten des Dreyecks an.

Ist (Fig. 7) $AM = MB$, so liegt in der Linie CM der Schwerpunct des Dreiecks; wir haben

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.m} = \frac{AM}{MC}$$

$$\frac{\sin.\psi}{\sin.n} = \frac{MB}{BC}$$

also

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{BC}{AC},$$

d. h. wenn man den Schwerpunct mit einem Eckpuncte

des Dreiecks verbindet, so wird der Winkel so getheilt, dass sich die Sinusse der Theile verkehrt wie die anliegenden Seiten verhalten, oder da dieses für jeden Eckpunct gilt, so können wir sagen: Wenn man jeden Winkel des Dreiecks so theilet, dass sich die Sinusse der Theilwinkel verkehrt wie die anliegenden Seiten verhalten, so schneiden sich diese drei Theilungslinien in einem einzigen Puncte, und dieser Punct ist der Schwerpunct des Dreiecks. Man kann hier die Analogie des Minimumpunctes und Schwerpunctes nicht übersehen.

Es sey ferner in Fig. 7 CM senkrecht auf AB, so liegt in der CM der Durchschnittspunct der Perpendikel; wir haben zugleich:

$$CM = AC \cos.\varphi = BC \cos.\psi$$

daher:

$$\frac{\cos.\varphi}{\cos.\psi} = \frac{BC}{AC}$$

d. h. wenn man den Durchschnittspunct der Perpendikel mit einem Eckpunct des Dreiecks verbindet; so wird der Winkel so getheilt, dass sich die Cosinusse der Theile verkehrt wie die anliegenden Seiten verhalten, und folglich: Wenn man jeden Winkel so theilet, dass sich die Cosinusse der Theilwinkel verkehrt wie die anliegenden Seiten verhalten, so schneiden sich die drei Theilungslinien in einem einzigen Puncte, und dieser Punct ist der Durchschnittspunct der Perpendikel.

Es sey (Fig. 8) MC = MA = MB = r, also M der Mittelpunct des umschriebenen Kreises, so ist:

$$b^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos.2\varphi$$
$$a^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos.2\psi$$

$$b = 4r^2 \cos.^2\varphi$$

$$a^2 = 4r^2 \cos.^2\psi$$

also $$\frac{\cos.\varphi}{\cos.\psi} = \frac{b}{a}.$$

Verbindet man also den Mittelpunct des umschriebenen Kreises mit einem Eckpuncte, so wird der Winkel so getheilt, dass die Cosinusse der Theilwinkel sich gerade wie die anliegenden Seiten verhalten oder: Wenn man jeden Winkel so theilet, dass die Cosinusse der Theile sich gerade so verhalten, wie die anliegenden Seiten, so schneiden sich diese drei Theilungslinien in einem einzigen Puncte, und dieser Punct ist der Mittelpunct des umschriebenen Kreises.

Es sey ferner (Fig. 9) M der Punct, welcher die Eigenschaft hat, dass die Summe seiner Distanzen von den drei Eckpuncten ein Minimum ist, so muss $AMB = BMC = CMA = 120^0$ seyn, siehe Meyer Hirsch Sammlung geometrischer Aufgaben pag. 225.

Setzen wir der Kürze halber

$$MQ = p, \; RM = q, \; MP = r$$

$$AM = x, \; BM = y, \; CM = z.$$

Da $\sin.120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, so hat man

$$\frac{zy\sqrt{3}}{2} = ap$$

$$\frac{xz\sqrt{3}}{2} = bq$$

$$\frac{xy\sqrt{3}}{2} = cr$$

also

$$\frac{ap}{yz} = \frac{bq}{xz} = \frac{cr}{xy}$$

Nun ist:

$$x = \frac{r}{\sin.\varphi''},\ y = \frac{p}{\sin.\varphi'},\ z = \frac{q}{\sin.\varphi}$$

woraus

$$\frac{a \sin.\varphi'}{z} = \frac{b \sin.\varphi}{x} = \frac{c \sin \varphi''}{y};$$

eben so hat man aber auch

$$x = \frac{q}{\sin.\psi''}\ y = \frac{r}{\sin.\psi'}\ z = \frac{p}{\sin.\psi}$$

woraus:

$$\frac{a \sin.\psi}{y} = \frac{b \sin.\psi''}{z} = \frac{c \sin.\psi'}{x}$$

Es ist wie man leicht sieht

$$\frac{x}{y} = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{b\sin.\varphi}{a\sin.\psi}$$

also

$$\frac{x}{y} = \frac{b\sin.\varphi}{a\sin.\psi}$$

Aus den obigen Gleichungen folgt aber

$$\frac{x}{y} = \frac{c\sin.\psi'}{a\sin.\varphi}$$

woraus

$$\frac{b\sin.\varphi}{a\sin.\psi} = \frac{c\sin.'\psi}{a\sin.\psi}$$

also

$$b\sin.\varphi = c\sin.\psi'$$

oder

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin.\psi'}{\sin.\varphi} \qquad (\mu)$$

eben so hat man $\frac{y}{z} = \frac{c\sin.\varphi''}{b\sin.\psi''}$ und $\frac{y}{z} = \frac{a\sin.\psi}{b\sin.\phi''}$

also

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin.\psi}{\sin.\varphi''} \qquad (\nu)$$

und $\qquad \frac{z}{x} = \frac{a\sin.\varphi}{c\sin.\psi'}$ und $\frac{z}{x} = \frac{b\sin.\psi''}{c\sin.\psi'}$

also $\qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin.\psi''}{\sin.\varphi'} \qquad (\rho)$

Die Gleichungen (μ), (ν), (ρ) zeigen an, wie die Winkel des Dreyecks getheilt werden, wenn man den Punct der die Eigenschaft hat, dass die Summe seiner Distanzen von den drei Eckpuncten ein Minimum ist, mit den Ecken des Dreiecks verbindet; macht man daher die Theilung der Winkel nach Vorschrift der Gleichungen (μ), (ν), (ρ), so schneiden sich die drei Theilungslinien in einem einzigen Puncte, welcher die oben betrachtete Eigenschaft hat.

4) Wir werden gleich sehen, dass diese Sätze einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig sind. Wir wollen zu diesem Behufe zuerst die Bedingungsgleichung der Sinusse der Winkel, welche die Theilungslinien der Winkel des Dreiecks mit den correspondirenden Seiten machen, damit die Theilungslinien sich in einem Puncte schneiden, aufsuchen.

Wir finden (Fig. 4.)

$$\sin.\varphi = \frac{y}{z}, \quad \sin.\varphi' = \frac{p}{y}, \quad \sin.\varphi'' = \frac{r}{x}$$

$$\sin.\varphi = \frac{p}{z}, \quad \sin.\psi' = \frac{r}{y}, \quad \sin.\psi'' = \frac{q}{x},$$

also $\qquad \sin.\varphi \; \sin.\varphi' \; \sin.\varphi'' = \frac{pqr}{xyz}$

$$\sin.\psi \; \sin.\psi' \; \sin.\psi'' = \frac{pqr}{xyz}$$

und $\qquad \frac{\sin.\varphi \; \sin.\varphi' \; \sin.\varphi''}{\sin.\psi \; \sin.\psi' \; \sin.\psi''} = 1$

die gesuchte Bedingungsgleichung.

Sind also die Verhältnisse $\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi}$ und $\frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'}$ gegeben, so findet man hiedurch das Verhältniss $\frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi'''}$, damit die durch A gezogene Linie den Durchschnittspunct der beiden andern Theilungslinien treffe.

Macht man

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin\psi.} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{b}{c}$$

so schneiden sich die Theilungslinien, wie wir früher gesehen haben, im Schwerpuncte.

Hingegen wenn man

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{a}{c}; \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{c}{b}$$

macht, im Minimumpunct.

Endlich wenn

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi'} = \frac{e}{b} \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi} = \frac{a}{c} \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi''} = \frac{b}{a} \text{ ist,}$$

in demjenigen Puncte, der die Eigenschaft hat, dass die Summe seiner Distanzen von den drei Eckpuncten ein Minimum ist.

Allein die drei Theilungslinien werden sich auch in einem Puncte schneiden, wenn man setzt:

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi'} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi''} = \frac{a}{h}$$

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi''} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi'} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi 7'} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\sin.\psi'}{\sin.\varphi''} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi} = \frac{b}{c}$$

oder

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{a^n}{b^n}; \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{c^n}{b^n}; \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{b^n}{c^n}$$

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{b^n}{a^n}; \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{a^n}{c^n}; \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{c^n}{b^n}$$

d. h. theilet man die Winkel der Dreiecks so, dass sich die Sinusse der Theilungswinkel gerade oder verkehrt, wie die nten Potenzen der anliegenden Seiten verhalten, so schneiden sich die Theilungslinien in einem einzigen Puncte. Besondere Fälle, davon sind der Schwerpunct, und der Minimumpunct, (nämlich für $n = 1$) und der Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises (nämlich für $n = 0$).

Eben so kann man auch setzen;

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{f(a)}{f(b)}; \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{f(c)}{f(a)}; \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{f(b)}{f(c)}$$

oder

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{f(bc)}{f(ac)}; \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{f(ab)}{f(bc)}; \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{f(ac)}{f(ab)}$$

wobei f was immer für einer Function bedeutet; oder

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{f(abc)}{f'(abc)}$$

$$\frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{f''(abc)}{f(abc)}$$

$$\frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{f'(abc)}{f''(abc)}$$

Eben so

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}, \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma}$$

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi} = \frac{(\cos.\alpha)^n}{(\cos.\beta)^n}, \quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'} = \frac{(\cos.\gamma)^n}{(\cos.\alpha)^n}, \quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''} = \frac{(\cos.\beta)^n}{(\cos.\gamma)^n}$$

oder allgemeiner

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)},\quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'}=\frac{f(\gamma)}{f(\alpha)},\quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''}=\frac{f(\beta)}{f(\gamma)}$$

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi}=\frac{f(\beta\gamma)}{f(\alpha\gamma)},\quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'}=\frac{f(\alpha\beta)}{f(\beta\gamma)},\quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''}=\frac{f(\alpha\gamma)}{f(\alpha\beta)}$$

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\psi}=\frac{f(\alpha\beta\gamma)}{f'(\alpha\beta\gamma)},\quad \frac{\sin.\varphi'}{\sin.\psi'}=\frac{f''(\alpha\beta\gamma)}{f(\alpha\beta\gamma)},\quad \frac{\sin.\varphi''}{\sin.\psi''}=\frac{f'(\alpha\beta\gamma)}{f''(\alpha\beta\gamma)}$$

5.) Aus Fig. 7 ist ersichtlich

$$\frac{AM}{\sin.\varphi}=\frac{b}{\sin.m}$$

$$\frac{MB}{\sin.\psi}=\frac{c}{\sin.n}$$

also

$$\frac{AM}{MB}=\frac{\sin.\psi}{\sin.\varphi}\cdot\frac{b}{c}$$

Ist nun $\frac{\sin.\psi}{\sin.\varphi}=\frac{c^n}{b^n}$

so ist $\frac{AM}{MB}=\frac{c^{n-1}}{b^{n-1}}$

Ist aber $\frac{\sin.\psi}{\sin.\varphi}=\frac{b^n}{c^n}$

so ist $\frac{AM}{MB}=\frac{b^{n+1}}{c^{n+1}}$

Drücken wir sowohl $n-1$, als $n+1$ durch einen Buchstaben m aus, so können wir, da das angeführte Verhältniss bei jeder Seite Statt findet, sagen: Wenn man jede Seite im geraden oder verkehrten Verhältnisse der mten Potenzen der anliegenden Seiten theilt, und die Theilungspuncte mit den gegenüberstehenden

Eckpuncten verbindet, so schneiden sich die Theilungslinien in einem einzigen Puncte. Allgemein theilet man AB so, dass $\frac{AM}{MB} = \frac{F(a)}{F(b)}$ ist, und so bei den übrigen, und verbindet man die Theilungspuncte mit den gegenüberstehenden Eckpuncten, so schneiden sich die Theilungslinien in einem Puncte.

In (Fig. 10) haben wir:

$$BD.\ \cos.\beta + AN = c$$
$$DC.\ \cos.\gamma + AM = b$$
$$AN = c - BD.\ \cos.\beta$$
$$AM = b - DC.\ \cos.\gamma$$
$$AD\ \cos.\varphi = c - BD.\ \cos.\beta$$
$$AD\ \cos.\psi = b - DC.\ \cos.\gamma$$

also

$$\frac{\cos.\varphi}{\cos.\psi} = \frac{c - BD.\ \cos.\beta}{b - DC.\ \cos.\gamma}$$
$$BD + DC = a$$

woraus

$$\frac{BD}{DC} = \frac{C\left\{1 - \frac{\cos.\varphi}{\cos.\psi}\cos.\alpha\right\}}{B\left\{\frac{\cos.\varphi}{\cos.\psi} - \cos.\alpha\right\}}$$

wodurch man, wenn man das Verhältniss $\frac{\cos.\varphi}{\cos.\psi}$ hat, auch das Verhältniss $\frac{BD}{DC}$ erhält.

6) Fregier hat in Gergonne's Annalen den Satz bekannt gemacht, dass wenn drei durch die Eckpuncte des Dreiecks gezogene Gerade sich in einem Puncte schneiden, und man durch die gegenüberstehenden Halbirungspuncte der drei Seiten parallele Linien zu diesen obigen zieht, sich auch diese drei Linien in einem

einzigen Puncte schneiden müssen, welches für sich schon ganz klar ist. Denn verbindet man die drei Halbirungspuncte durch Gerade, so entseht ein dem gegebenen ähnliches Dreyeck, und die zwei einander gegenüberstehenden Winkel der beiden Dreiecke sind die gleichen. Wird nun der Winkel des einen Dreiecks auf irgend eine Art in Bezug auf die Seiten getheilt, so wird eine dieser Theilungslinien durch den gegenüberstehenden Halbirungspunct parallel gezogene Gerade, den gleichen Winkel auf dieselbe Art theilen. Schneiden sich die drei Theilungslinien des einen Dreiecks, so wird dasselbe von den drei Theilungslinien des zweiten Dreiecks gelten müssen.

Behandelt man das Vorhergehende analytisch, so findet man, dass die Bedingungsgleichung, damit drei durch die Eckpuncte gezogene Linien sich in einem Puncte schneiden, dieselbe ist wie die, damit die durch die gegenüberstehenden Halbirungspuncte mit diesen parallel gezogenen Geraden sich ebenfalls in einem Puncte schneiden.

Zieht man also durch die Halbirungspuncte Parallellinien zu den Seiten des Dreiecks, und theilet die dadurch entstandenen Winkel so, dass die Sinusse der Theilwinkel in irgend einem der in (4) angegebenen Verhältnisse stehen, so schneiden sich die Theilungslinien in einem einzigen Puncte.

7) Es seyen (Fig. 11) im Dreieck $A'B'C'$ die Seiten $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ in den Puncten C, B, A, halbirt. Man denke sich nun durch die Puncte A' B', C' Theilungslinien so gezogen, dass sie sich in einem Puncte schneiden; eine dieser Theilungslinien sey AD. Durch den Punct D ziehe man Parallelen zu b und c und ver-

längere AD, so bildet die Verlängerung mit den zu b und c parallel gezogenen Linien dieselben Winkel wie mit b und c, und der bei D dadurch entstandene Winkel ist gleich dem Winkel A.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass nun $\frac{BD}{DC} = \frac{c^m}{b^m}$ oder $\frac{b^m}{c^m}$ oder allgemein $\frac{f(c)}{f(b)}$ ist, daher kann man sagen:

Theilet man jede Seite des Dreiecks so, dass sich die Stücke derselben gerade oder verkehrt wie die mten Potenzen der anliegenden Seiten oder wie irgend welche Functionen dieser Seiten verhalten (wobei aber bei allen Seiten dieselbe Function zu nehmen ist und die Functionenquotienten so gestellt seyn müssen, dass sie in einander multiplicirt Eins zum Product geben) ziehet dann durch die Theilungspuncte Parallele zu den beiden andern Seiten des Dreiecks und theilet den dadurch entstehenden Winkel, in einem der in (4) angegebenen Verhältnisse, so schneiden sich die drei Theillinien in einem einzigen Puncte.

Man sieht also, dass es unzählige Puncte im geradlinigen Dreiecke gibt, welche durch den Durchschnitt symmetrisch gezogener Geraden entstehen, und wovon die bekannten einzelne Fälle sind.

Höchst wahrscheinlich werden viele dieser Puncte sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen, und manche davon einer nähern Untersuchung nicht unwerth seyn.

Miscellen.

1.

Brom in der Mutterlauge aus Hall in Tyrol entdeckt von Hrn. Ludwig in Wien.

Da der von Balard neu entdeckte Körper, das Brom, sich nach den Versuchen der Herren Liebich, W. Meissner in Halle, Van Mons und Vogel auch in mehreren Salzsoolen vorfinden soll, so fand ich mich veranlasst, unsere inländischen Salzsoolen zu untersuchen. In dieser Absicht leitete ich Chlorgas (nach Balard's Anleitung, Annales de Chimie et Physique Tom. 31, p. 337), durch die Mutterlauge aus der Salzsiederey zu Hall in Tyrol, welche zu andern Versuchen seit längerer Zeit vorhanden war. Die Mutterlauge nahm sehr bald eine goldgelbe Farbe an, und entwickelte einen eigenthümlichen, dem Chlorperoxyd sehr ähnlichen Geruch, der zu Thränen reitzt, und in der Nase eine sehr unangenehme Empfindung hervorbringt; wird diese Lauge mit Aether geschüttelt, so wird dieser braunroth, die Lauge aber beinahe entfärbt; durch Zusatz von Kali verschwindet die Farbe des Aethers, und durch Abdampfen dieser Flüssigkeit erhält man eine gelbe krystallinische Masse, welche durch die Verbindung von Brom mit Kalium, uud durch den zersetzten Aether etwas gelb gefärbt ist. Diese wurde nun mit Manganperoxyd und verdünnter Schwefelsäure bei mässiger Temperatur in eine gut gekühlte Vorlage überdestillirt. Um das der Flüssigkeit noch allenfalls anhängende Chlor zu beseitigen, habe ich das Destillat mit Kali abermals verbunden, und durch Krystallisation die Verbindung des Brom mit Kali, die schwerer auflöslich ist, von der mit Chlor zu reinigen gesucht, auf die angezeigte Art, das Brom dargestellt, und über geschmolzenem Calciumchlorid nochmals überdestillirt. Dasselbe hat eine dunkel rothbraune Farbe, ist sehr flüchtig, hat einen durchdringenden reitzenden Geruch; ist eine kleine Menge mit viel atmosphärischer Luft gemischt, so ist der Geruch dem sehr ähnlich, den man beim Eintritte in grosse Salzsiedereyen oder auf dem Meere wahrnimmt; der Geschmack ist scharf; das Brom färbt organische Substanzen gelb, und zerstöret sie; mit Stärke entsteht eine gelbe Färbung, und nach einiger Zeit sondern sich besonders aus der mit Chlor behandelten Mutterlauge gelbrothe Tropfen ab;

das Wasser nimmt den Geruch, Geschmack, und zum Theil auch die Farbe des Broms an, aber der grösste Theil des letzteren bleibt auf dem Boden gleich einem schweren ätherischen Oele liegen; mit Kalium verbindet es sich unter Feuererscheinung mit einer heftigen Detonation; diese Verbindung ist im Wasser schwer auflöslich, und krystallisirbar; mit Natron stellt es eine schwer krystallisirbare Verbindung dar; mit Quecksilber verbindet es sich augenblicklich, gleicht anfangs einem Amalgam, nach und nach wird diese Verbindung in ein weisses, dem Calomel ähnliches Pulver verwandelt, welches bei höherer Temperatur als ein rothes Sublimat an kältere Gegenstände sich absetzt; mit salpetersaurem Quecksilberprotoxyd entsteht ein weisser, mit Quecksilberperchlorid aber gar kein Niederschlag; durch salpetersaures Silber bildet sich ein bedeutender, schwach gelber pulveriger Niederschlag, der am Lichte wenig, und viel später als Silberchlorid, geschwärzt wird. Die Menge der mir zu Gebothe stehenden Mutterlauge war zu gering, um mit diesen Körpern so viele Versuche vorzunehmen, als es die Wichtigkeit des Gegenstandes erfordert. Die Salzsoole von Ischl in Oberösterreich und Hallein im Salzburgischen habe ich derselben Operation unterzogen; da ich aber bloss Soole, und diese in sehr geringer Menge hatte, so habe ich kein Brom darin finden können. Zu wichtig ist dieser Gegenstand, als dass man ihn unbeachtet liesse, um so mehr, da seit längerer Zeit die Salzsoolen so wie das Meerwasser zu Bädern verwendet werden, und vielleicht trägt der Gehalt des Broms sehr viel zu den heilsamen Wirkungen derselben bei. Ich habe daher die nöthigen Anstalten getroffen, um mit grösserer Menge den Versuch zu wiederhohlen.

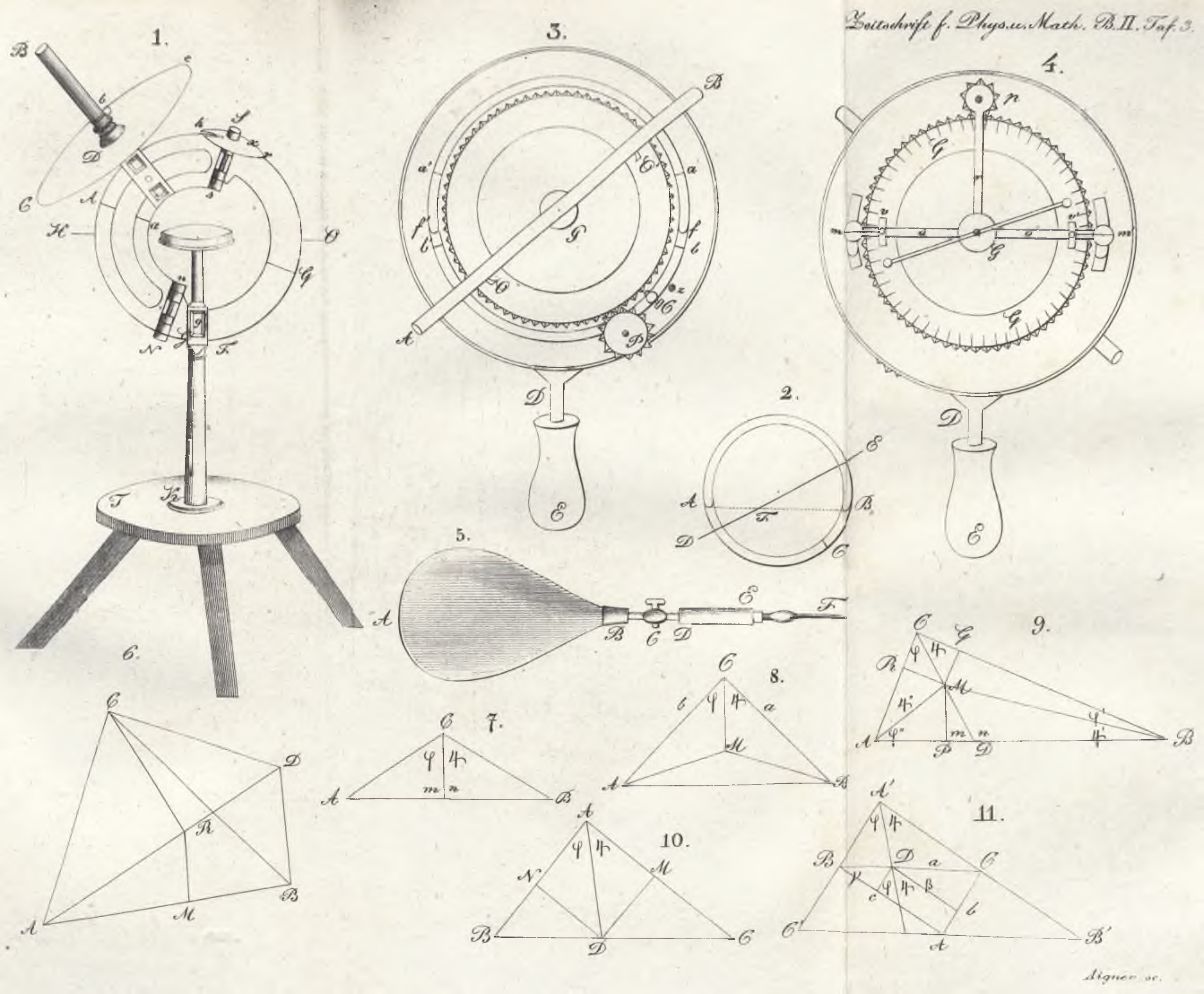
2.

Massstäbe von Werner in Wien.

Unter den vielen physikalischen und mathematischen Geräthschaften, welche in Wien von vorzüglicher Güte verfertiget werden, verdienen Werners Massstäbe einen vorzüglichen Platz, sowohl wegen der Richtigkeit der Theilung, als auch wegen der Billigkeit des Preises. Er verfertiget sie von jeder Grösse und in jeder Theilung, zugleich auch mit sehr genauen Vorrichtungen zum Linienziehen und zur Vergleichung der Längenmasse verschiedener Länder mit Nonien und Transversalen, deren letztere entweder in Linien ausgezogen, oder zum Einsetzen der Zirkelspitzen punctirt sind.






1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
Aigner sc.

